图书在版编目（CIP）数据

复分析：可视化方法/(美) 尼达姆(Needham, T.)
著；齐民友译. —北京：人民邮电出版社，2009. 7
(图灵数学 · 统计学丛书)
书名原文: Visual Complex Analysis
ISBN 978-7-115-20883-5

Ⅰ. 复… Ⅱ. ①尼…②齐… Ⅲ. 复 Ⅳ. O174.5
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 073754 号

内 容 提 要

本书是复分析领域近年来产生了广泛影响的一本著作. 作者独辟蹊径，用丰富的图例展示各种概念、定理和证明思路，十分便于读者理解，充分揭示了复分析的数学美. 书中讲述的内容有作为变换看的复函数、默比乌斯变换、微分学、非欧几何学、环绕数、复积分、柯西公式、向量场、调和函数等.

本书可作为大学本科生或研究生的复分析课程教材或参考书.

图灵数学 · 统计学丛书

复分析：可视化方法

◆ 著　　　[美] Tristan Needham
　译　　　齐民友
　责任编辑　明永玲
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　　电子函件 315@ptpress.com.cn
　网址：http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷
◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：33.75
　字数：656 千字　　　2009 年 7 月第 1 版
　印数：1–3 000 册　　2009 年 7 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2006-7032 号

ISBN 978-7-115-20883-5/O1

定价：79.00 元

读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

目　　录

第 1 章　几何和复算术 …… 1
1.1　引言 …… 1
1.1.1　历史的概述 …… 1
1.1.2　庞贝利的“奇想” …… 3
1.1.3　一些术语和记号 …… 5
1.1.4　练习 …… 6
1.1.5　符号算术和几何算术的等价性 …… 7
1.2　欧拉公式 …… 8
1.2.1　引言 …… 8
1.2.2　用质点运动来论证 …… 9
1.2.3　用幂级数来论证 …… 10
1.2.4　用欧拉公式来表示正弦和余弦 …… 12
1.3　一些应用 …… 12
1.3.1　引言 …… 12
1.3.2　三角 …… 13
1.3.3　几何 …… 14
1.3.4　微积分 …… 17
1.3.5　代数 …… 19
1.3.6　向量运算 …… 24
1.4　变换与欧氏几何* …… 26
1.4.1　克莱因眼中的几何 …… 26
1.4.2　运动的分类 …… 30
1.4.3　三反射定理 …… 32
1.4.4　相似性与复算术 …… 34
1.4.5　空间复数 …… 37
1.5　习题 …… 39
第 2 章　作为变换看的复函数 …… 47
2.1　引言 …… 47
2.2　多项式 …… 49
2.2.1　正整数幂 …… 49
2.2.2　回顾三次方程* …… 50
2.2.3　卡西尼曲线* …… 51
2.3　幂级数 …… 54
2.3.1　实幂级数的神秘之处 …… 54
2.3.2　收敛圆 …… 57
2.3.3　用多项式逼近幂级数 …… 60
2.3.4　唯一性 …… 61
2.3.5　对幂级数的运算 …… 62
2.3.6　求收敛半径 …… 64
2.3.7　傅里叶级数* …… 67
2.4　指数函数 …… 69
2.4.1　幂级数方法 …… 69
2.4.2　这个映射的几何意义 …… 70
2.4.3　另一种方法 …… 71
2.5　余弦与正弦 …… 73
2.5.1　定义与恒等式 …… 73
2.5.2　与双曲函数的关系 …… 74
2.5.3　映射的几何 …… 76
2.6　多值函数 …… 78
2.6.1　例子：分数幂 …… 78
2.6.2　多值函数的单值支 …… 80
2.6.3　与幂级数的关联 …… 82
2.6.4　具有两个支点的例子 …… 83
2.7　对数函数 …… 85
2.7.1　指数函数的逆 …… 85
2.7.2　对数幂级数 …… 87
2.7.3　一般幂级数 …… 88
2.8　在圆周上求平均值* …… 89
2.8.1　质心 …… 89
2.8.2　在正多边形上求平均值 …… 91
2.8.3　在圆周上求平均值 …… 94
2.9　习题 …… 96

第 3 章 默比乌斯变换和反演 ············ 106
3.1 引言 ············ 106
3.1.1 默比乌斯变换的定义和意义 ············ 106
3.1.2 与爱因斯坦相对论的联系* ············ 107
3.1.3 分解为简单的变换 ············ 107
3.2 反演 ············ 108
3.2.1 初步的定义和事实 ············ 108
3.2.2 圆周的保持 ············ 110
3.2.3 用正交圆周构作反演点 ············ 112
3.2.4 角的保持 ············ 114
3.2.5 对称性的保持 ············ 115
3.2.6 对球面的反演 ············ 116
3.3 反演应用的三个例子 ············ 118
3.3.1 关于相切圆的问题 ············ 118
3.3.2 具有正交对角线的四边形的一个奇怪的性质 ············ 119
3.3.3 托勒密定理 ············ 120
3.4 黎曼球面 ············ 121
3.4.1 无穷远点 ············ 121
3.4.2 球极射影 ············ 121
3.4.3 把复函数转移到球面上 ············ 124
3.4.4 函数在无穷远点的性态 ············ 125
3.4.5 球极射影的公式* ············ 127
3.5 默比乌斯变换: 基本结果 ············ 129
3.5.1 圆周、角度和对称性的保持 ············ 129
3.5.2 系数的非唯一性 ············ 130
3.5.3 群性质 ············ 131
3.5.4 不动点 ············ 132
3.5.5 无穷远处的不动点 ············ 132
3.5.6 交比 ············ 134
3.6 默比乌斯变换作为矩阵* ············ 136
3.6.1 与线性代数的联系的经验上的证据 ············ 136
3.6.2 解释: 齐次坐标 ············ 138
3.6.3 特征向量与特征值* ············ 139
3.6.4 球面的旋转作为默比乌斯变换* ············ 141
3.7 可视化与分类* ············ 143
3.7.1 主要思想 ············ 143
3.7.2 椭圆型、双曲型和斜驶型变换 ············ 144
3.7.3 乘子的局部几何解释 ············ 146
3.7.4 抛物型变换 ············ 147
3.7.5 计算乘子* ············ 149
3.7.6 用特征值解释乘子* ············ 150
3.8 分解为 2 个或 4 个反射* ············ 151
3.8.1 引言 ············ 151
3.8.2 椭圆型情况 ············ 151
3.8.3 双曲型情况 ············ 152
3.8.4 抛物型情况 ············ 154
3.8.5 总结 ············ 154
3.9 单位圆盘的自同构* ············ 155
3.9.1 计算自由度的数目 ············ 155
3.9.2 用对称原理来求公式 ············ 156
3.9.3 最简单的公式的几何解释* ············ 157
3.9.4 介绍黎曼映射定理 ············ 158
3.10 习题 ············ 159
第 4 章 微分学: 伸扭的概念 ············ 166
4.1 引言 ············ 166
4.2 一个令人迷惑的现象 ············ 166
4.3 平面映射的局部描述 ············ 168
4.3.1 引言 ············ 168
4.3.2 雅可比矩阵 ············ 168
4.3.3 伸扭的概念 ············ 170
4.4 复导数作为伸扭 ············ 170
4.4.1 重新考察实导数 ············ 170
4.4.2 复导数 ············ 171
4.4.3 解析函数 ············ 173
4.4.4 简短的总结 ············ 174
4.5 一些简单的例子 ············ 175
4.6 共形 = 解析 ············ 176

4.6.1　引言 …… 176
4.6.2　在整个区域中的共形性 …… 177
4.6.3　共形性与黎曼球面 …… 179
4.7　临界点 …… 179
4.7.1　挤压的程度 …… 179
4.7.2　共形性的破坏 …… 180
4.7.3　支点 …… 181
4.8　柯西–黎曼方程 …… 182
4.8.1　引言 …… 182
4.8.2　线性变换的几何学 …… 183
4.8.3　柯西–黎曼方程 …… 184
4.9　习题 …… 185
第 5 章　微分学的进一步的几何研究 …… 190
5.1　柯西–黎曼的真面目 …… 190
5.1.1　引言 …… 190
5.1.2　笛卡儿形式 …… 190
5.1.3　极坐标形式 …… 191
5.2　关于刚性的一个启示 …… 192
5.3　$\log(z)$ 的可视微分法 …… 195
5.4　微分学的各法则 …… 196
5.4.1　复合 …… 196
5.4.2　反函数 …… 197
5.4.3　加法与乘法 …… 198
5.5　多项式、幂级数和有理函数 …… 198
5.5.1　多项式 …… 198
5.5.2　幂级数 …… 199
5.5.3　有理函数 …… 201
5.6　幂函数的可视微分法 …… 201
5.7　$\exp(z)$ 的可视微分法 …… 203
5.8　$E' = E$ 的几何解法 …… 204
5.9　高阶导数的一个应用：曲率* …… 206
5.9.1　引言 …… 206
5.9.2　曲率的解析变换 …… 207
5.9.3　复曲率 …… 209
5.10　天体力学* …… 212
5.10.1　有心力场 …… 212
5.10.2　两类椭圆轨道 …… 213
5.10.3　把第一种椭圆轨道变为第二种 …… 215
5.10.4　力的几何学 …… 216
5.10.5　一个解释 …… 216
5.10.6　卡斯纳–阿诺尔德定理 …… 217
5.11　解析拓展 …… 218
5.11.1　引言 …… 218
5.11.2　刚性 …… 219
5.11.3　唯一性 …… 220
5.11.4　恒等式的保持 …… 222
5.11.5　通过反射作解析拓展 …… 223
5.12　习题 …… 227
第 6 章　非欧几何学* …… 236
6.1　引言 …… 236
6.1.1　平行线公理 …… 236
6.1.2　非欧几何的一些事实 …… 238
6.1.3　弯曲曲面上的几何学 …… 239
6.1.4　内蕴几何与外在几何的对立 …… 241
6.1.5　高斯曲率 …… 241
6.1.6　常曲率曲面 …… 243
6.1.7　与默比乌斯变换的联系 …… 244
6.2　球面几何 …… 245
6.2.1　球面三角形的角盈 …… 245
6.2.2　球面上的运动：空间旋转和反射 …… 246
6.2.3　球面上的一个共形映射 …… 249
6.2.4　空间旋转也是默比乌斯变换 …… 252
6.2.5　空间旋转与四元数 …… 256
6.3　双曲几何 …… 259
6.3.1　曳物线和伪球面 …… 259
6.3.2　伪球面的常值负曲率* …… 260
6.3.3　伪球面上的一个共形映射 …… 261

6.3.4 贝尔特拉米的双曲平面 ······ 263
6.3.5 双曲直线和反射 ······ 266
6.3.6 鲍耶–罗巴切夫斯基公式* ······ 269
6.3.7 保向运动的三种类型 ······ 271
6.3.8 把任意保向运动分解为两个反射 ······ 275
6.3.9 双曲三角形的角盈 ······ 277
6.3.10 庞加莱圆盘 ······ 279
6.3.11 庞加莱圆盘中的运动 ······ 282
6.3.12 半球面模型与双曲空间 ······ 285
6.4 习题 ······ 289
第 7 章 环绕数与拓扑学 ······ 298
7.1 环绕数 ······ 298
7.1.1 定义 ······ 298
7.1.2 “内”是什么意思? ······ 299
7.1.3 快速地求出环绕数 ······ 299
7.2 霍普夫映射度定理 ······ 301
7.2.1 结果 ······ 301
7.2.2 环路作为圆周的映射* ······ 301
7.2.3 解释* ······ 303
7.3 多项式与辐角原理 ······ 303
7.4 一个拓扑辐角原理* ······ 304
7.4.1 用代数方法来数原象个数 ······ 304
7.4.2 用几何方法来数原象个数 ······ 306
7.4.3 解析函数在拓扑上有何特殊 ······ 307
7.4.4 拓扑辐角原理 ······ 309
7.4.5 两个例子 ······ 310
7.5 鲁歇定理 ······ 311
7.5.1 结果 ······ 311
7.5.2 代数的基本定理 ······ 312
7.5.3 布劳威尔不动点定理* ······ 313
7.6 最大值与最小值 ······ 313
7.6.1 最大模原理 ······ 313
7.6.2 相关的结果 ······ 315
7.7 施瓦茨–皮克引理* ······ 315
7.7.1 施瓦茨引理 ······ 315
7.7.2 刘维尔定理 ······ 318
7.7.3 皮克的结果 ······ 319
7.8 广义辐角原理 ······ 321
7.8.1 有理函数 ······ 321
7.8.2 极点与本性奇点 ······ 323
7.8.3 解释* ······ 325
7.9 习题 ······ 326
第 8 章 复积分：柯西定理 ······ 334
8.1 引言 ······ 334
8.2 实积分 ······ 335
8.2.1 黎曼和 ······ 335
8.2.2 梯形法则 ······ 336
8.2.3 误差的几何估计 ······ 337
8.3 复积分 ······ 339
8.3.1 复黎曼和 ······ 339
8.3.2 一个可视化技巧 ······ 341
8.3.3 一个有用的不等式 ······ 342
8.3.4 积分法则 ······ 342
8.4 复反演 ······ 343
8.4.1 一个圆弧 ······ 343
8.4.2 一般环路 ······ 344
8.4.3 环绕数 ······ 346
8.5 共轭映射 ······ 347
8.5.1 引言 ······ 347
8.5.2 用面积来解释 ······ 347
8.5.3 一般环路 ······ 349
8.6 幂函数 ······ 349
8.6.1 沿圆弧的积分 ······ 349
8.6.2 复反演作为极限情况* ······ 351
8.6.3 一般回路和形变定理 ······ 351
8.6.4 定理的进一步推广 ······ 353
8.6.5 留数 ······ 353

8.7 指数映射……355
8.8 基本定理……356
8.8.1 引言……356
8.8.2 一个例子……356
8.8.3 基本定理……357
8.8.4 积分作为原函数……359
8.8.5 对数作为积分……361
8.9 用参数作计算……362
8.10 柯西定理……363
8.10.1 一些预备知识……363
8.10.2 解释……364
8.11 一般的柯西定理……366
8.11.1 结果……366
8.11.2 解释……367
8.11.3 一个更简单的解释……368
8.11.4 回路积分的一般公式……369
8.12 习题……370
第 9 章 柯西公式及其应用……377
9.1 柯西公式……377
9.1.1 引言……377
9.1.2 第一种解释……377
9.1.3 高斯平均值定理……378
9.1.4 第二种解释和一般柯西公式……379
9.2 无穷可微性和泰勒级数……380
9.2.1 无穷可微性……380
9.2.2 泰勒级数……381
9.3 留数计算……383
9.3.1 以极点为中心的罗朗级数……383
9.3.2 计算留数的一个公式……384
9.3.3 对实积分的应用……385
9.3.4 用泰勒级数计算留数……387
9.3.5 在级数求和上的应用……388
9.4 环形域中的罗朗级数……390
9.4.1 一个例子……390
9.4.2 罗朗定理……391
9.5 习题……394
第 10 章 向量场：物理学与拓扑学……398
10.1 向量场……398
10.1.1 复函数作为向量场……398
10.1.2 物理向量场……399
10.1.3 流场和力场……400
10.1.4 源和汇……402
10.2 环绕数与向量场*……403
10.2.1 奇点的指数……403
10.2.2 庞加莱怎样看指数……406
10.2.3 指数定理……407
10.3 闭曲面上的流*……408
10.3.1 庞加莱–霍普夫定理的陈述……408
10.3.2 定义曲面上的指数……410
10.3.3 庞加莱–霍普夫定理的解释……411
10.4 习题……413
第 11 章 向量场与复积分……417
11.1 流量与功……417
11.1.1 流量……417
11.1.2 功……419
11.1.3 局部流量和局部功……420
11.1.4 散度和旋度的几何形式*……422
11.1.5 零散度和零旋度向量场……423
11.2 从向量场看复积分……425
11.2.1 波利亚向量场……425
11.2.2 柯西定理……427
11.2.3 例子：面积作为流量……428
11.2.4 例子：环绕数作为流量……429
11.2.5 向量场的局部性态*……430
11.2.6 柯西公式……431
11.2.7 正幂……432
11.2.8 负幂和多极子……433
11.2.9 无穷远处的多极子……435

11.2.10 罗朗级数作为多极子展开 …… 435
11.3 复位势 …… 436
11.3.1 引言 …… 436
11.3.2 流函数 …… 437
11.3.3 梯度场 …… 439
11.3.4 势函数 …… 440
11.3.5 复位势 …… 441
11.3.6 例 …… 444
11.4 习题 …… 445
第 12 章 流与调和函数 …… 448
12.1 调和对偶 …… 448
12.1.1 对偶流 …… 448
12.1.2 调和对偶 …… 451
12.2 共形不变性 …… 453
12.2.1 调和性的共形不变性 …… 453
12.2.2 拉普拉斯算子的共形不变性 …… 454
12.2.3 拉普拉斯算子的意义 …… 456
12.3 一个强有力的计算工具 …… 457
12.4 回顾复曲率* …… 459
12.4.1 调和等势线的几何性质 …… 459
12.4.2 调和等势线的曲率 …… 460
12.4.3 关于复曲率的进一步计算 …… 463
12.4.4 复曲率的其他几何性质 …… 464
12.5 绕障碍物的流 …… 466
12.5.1 引言 …… 466
12.5.2 一个例子 …… 466
12.5.3 镜像法 …… 470
12.5.4 把一个流映为另一个流 …… 476
12.6 黎曼映射定理的物理学 …… 478
12.6.1 引言 …… 478
12.6.2 外映射和绕障碍物的流 …… 479
12.6.3 内映射和偶极子 …… 481
12.6.4 内映射、涡旋和源 …… 483
12.6.5 一个例子：圆盘的自同构 …… 485
12.6.6 格林函数 …… 487
12.7 狄里希莱问题 …… 491
12.7.1 引言 …… 491
12.7.2 施瓦茨的解释 …… 492
12.7.3 圆盘的狄里希莱问题 …… 494
12.7.4 诺依曼和波歇的解释 …… 496
12.7.5 一般的格林公式 …… 501
12.8 习题 …… 504
参考文献 …… 507
译后记 …… 514

PDG

第 1 章　几何和复算术

1.1　引　　言

1.1.1　历史的概述

从最初发现复数以来，已经有 4 个半世纪流逝了．现在，读者可能已经知道，复数这个词讲的是一个形如 $a+ib$ 的整体，这里 a,b 是通常的实数，而 i 和任何通常的数都不同，具有 $i^2=-1$ 这个性质．这个发现最终将对整个数学有深远的影响，把许多原来根本不同的东西统一起来，说明了许多原来似乎不能理解的事情．尽管有这样的好结局 —— 事实上故事还在展开之中 —— 从复数最初发现以来，进展慢得令人痛苦．说真的，与 19 世纪以后所取得的进展比较，*复数生存的前250年里，可以说几乎没有进展*．

在那些如笛卡儿、费马、莱布尼茨那样伟大的智者甚至还有牛顿这样神话般的天才，出生而又逝去的年代里，复数怎么可能都完全沉睡着？答案似乎在于这样一个事实：复数一开始得到的并不是拥抱，而是怀疑、困惑，甚至是敌意．

1545 年出版的卡丹诺[①]的《大术》(Ars Magna) 一书，通常被认为是复数的出生证．然而，即使在卡丹诺的著作中，这种数一被引入就被他当作 "既不可捉摸又没有用处" 而加以摒弃．我们将会看到，只是庞贝利[②]在他的 1572 年出版的《代数》(L'Algebra) 一书中才第一次对复数进行了实际的计算．甚至这时，创新者似乎还否认 (至少一开始是这样) 复数是自己的创新，说 "所有这些似乎是以诡辩而不是以真理为基础的"．晚到 1702 年，莱布尼茨还把 -1 的平方根描述为 "介乎存在与不存在之间的两栖类"．这种情绪似乎也在这个时期使用的名词上反映出来．哪怕是讨论了复数，复数仍被称为 "不可能数" 或 "虚数 (imaginary)"，[③] 很不幸，后一个词直到今天仍然残留着．甚至到 1770 年情况还很混乱，甚至像欧拉这样伟大的数学家还错误地去论证 $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{6}$．

麻烦的根源似乎是心理上或哲学上的障碍．如果谁也不知道怎样回答 "什么是

---

① Girolamo Cardano, 1501—1576, 意大利数学家 —— 对于本书中讲到的许多数学家，除了少数几个最著名的以外，译者都试着写出他们的全名、国籍和生卒年份．有些还加了一些说明．这些，特别是某些 "形容词"，都由译者负责． —— 译者注

② Rafael Bombelli, 1526—1572, 意大利数学家． —— 译者注

③ 然而现在虚数 (或纯虚数) 是指 i 的实数倍，而不是指整个复数，附带说一下，引进 "实数" 这个词正是为了想把它与 "虚数" 区别开来．虚数的 "虚" 字在笛卡儿那里是用的 imaginary. imaginary 一词既指 "虚幻" 的，又指 "想象中的"、"图形中的"．笛卡儿原来是在后一个意义下使用它的，即强调只能在几何中理解． —— 译者注

复数?" 这个问题, 怎么可能热情而有信心地去研究这些事情呢?

直到 18 世纪末, 这个问题才有了令人满意的答案.[①] 威塞尔[②]、阿尔干[③]和高斯, 互相独立地然而很快地一个接一个认识到, 可以给复数一个简单的具体的几何解释, 即平面上的点或向量); 应该把 $a+ib$ 这个神秘的东西看成 xy 平面上以 (a,b) 为坐标的点, 或等价地看作是连接原点到此点的向量. 见图 1-1. 这样来看待的平面记作 $\mathbb{C}$, 并称为*复平面*.[④]

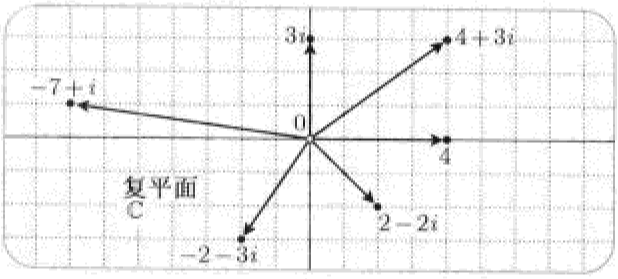


图 1-1

对两个复数的加法和乘法现在也可以赋予确定的几何意义, 即解释为平面上相应的点 (或向量) 的几何运算. 图 1-2a 演示了加法的法则:

两个复数之和 $A+B$ 由通常向量加法的平行四边形法则给出. (1.1)

注意, 这与图 1-1 是相容的, 因为 $4+3i$(举例来说) 确实是 4 与 $3i$ 之和.

图 1-2b 画出了不那么明显的乘法法则:

AB 之长是 A 之长与 B 之长的乘积, AB 的辐角是 A 与 B 的辐角之和. (1.2)

这个法则并不是由图 1-1 就可以看出的. 但是要注意它至少是与图 1-1 不矛盾的, (举例来说)$3i$ 确实是 3 与 i 的乘积. 请读者自己验证. i 与自身的乘积是一个更加令人兴奋的例子. 因为 i 有单位长, 而辐角为 $(\pi/2)$, i^2 也就有单位长与辐角 π. 所以 $i^2=-1$.

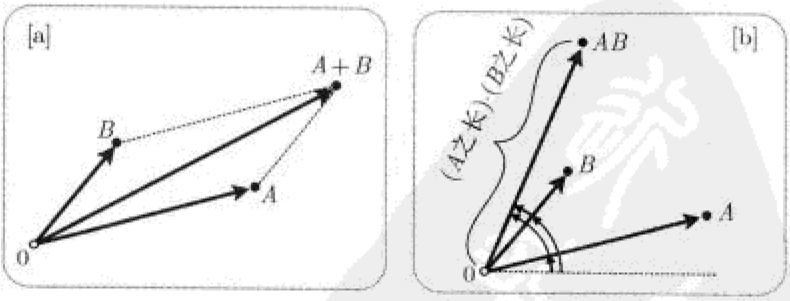


图 1-2

① Wallis 在 1673 年几乎碰上了这个结果. Stillwell [1989, 191 页] 讨论了这个有趣的几乎被弄糊涂了的事.

② Caspar Wessel, 1745—1818, 挪威测量学家. —— 译者注

③ Jean-Robert Argand, 1768—1822, 法国会计. —— 译者注

④ 也称为高斯平面或阿尔干平面.

威塞尔和阿尔干虽然发表了这个几何解释, 却未引起注意, 但是高斯的名声 (当时已和今天一样显赫) 保证了复数作为平面上的点得到了广泛传播而普遍为人接受. 比起这个新解释看来不那么重要 (至少一开始显得如此) 的是这样一个事实: 现在终于有了*某种办法*使这种数有意义了 —— 它们现在终于成了*合法*的研究对象了. 不管怎么说, 伟大发现的闸门即将开启.

就复数达成共识花了 2 个半世纪还多, 但是怎样用这些数作*微积分*的美丽的新理论 (即现在所谓*复分析*) 却发展得快得令人吃惊. 绝大多数基本结果 (由柯西、黎曼等人得出) 都是在 1814—1851 年得到的 —— 中间还不到 40 年!

对这门学科的历史肯定可能有别的看法. 例如 Stewart and Tall [1983, 7 页] 指出, 比之复分析的爆炸式的发展, 其几何解释就不那么重要了.[①]但是有一点必须提到, 如果事先不具备复平面的几何知识, 黎曼的思想是完全不可能的.

1.1.2 庞贝利的 "奇想"

复分析的力量和美丽最终来自乘法法则 (1.2) 以及加法法则 (1.1). 这些法则最初是由庞贝利以*符号规则*的形式给出的; 到两个多世纪多以后才出现了图 1-2. 因为我们原来似乎只是凭空抓出来了这些法则, 所以我们再回到 16 世纪以便理解其代数根源.

许多教科书都按一种方便的历史虚构来引入复数, 即以求解二次方程

$$x^2 = mx + c \tag{1.3}$$

为基础. 大约在公元前 2000 年, 就已经知道这种方程的一种解法, 它等价于现代的公式

$$x = \frac{1}{2}\left[m \pm \sqrt{m^2 + 4c}\right].$$

但是如果 $m^2 + 4c$ 为负则如何? 正是这个问题使得卡丹诺考虑负数的平方根. 到这一步为止, 这些教科书在历史方面都是正确的, 但是再往下就会读到这样的话: 因为需要方程 (1.3) 有解, 就*迫使*我们严肃地考虑复数. 但是这种论据在今天也和在 16 世纪一样, 几乎没有什么分量. 事实上, 我们已经指出, 卡丹诺毫不迟疑地摒弃这种解, 说它是 "没有用处" 的.

并不是卡丹诺缺少继续追究这件事所需的想象力, 而是他很有理由*不去这样做*. 对于古希腊人, 数学就是几何学的同义语, 所以, 如 (1.3) 那样的代数关系式并不是作为代数问题来看待的, (1.3) 只是解决一个真正的几何问题的载体. 例如, (1.3) 可以看成是求抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = mx + c$ 的交点. 见图 1-3a.

在 L_1 的情况下, 问题确实有解; 从代数上说, $(m^2 + 4c) > 0$, 而两个交点则由上式给出. 在 L_2 的情况下, 这个问题显然*没有*解; 从代数上说, $(m^2 + 4c) < 0$, 公式中出现了 "不可能" 的数正确地宣示了解的不存在.

① 对他们的论据, 我们有一点必须提出抗议: Wallis 在 1673 年并没有得到几何解释, 见上页脚注.

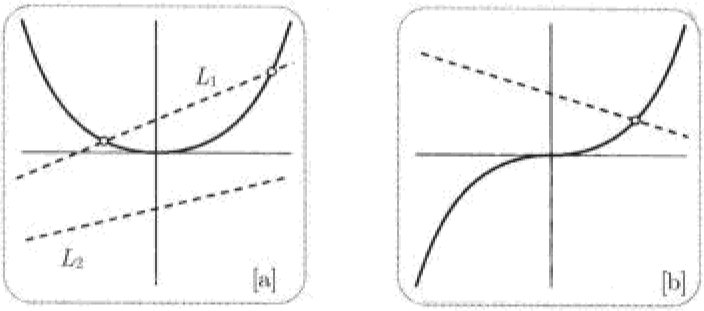


图　1-3

并不是二次方程迫使我们严肃地考虑复数，而是三次方程

$$x^3 = 3px + 2q$$

迫使人们这样做. [习题 1 表明，一般的三次方程都可以化为这种形式.] 这个方程代表求一条三次曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = 3px + 2q$ 的交点. 见图 1-3b. 卡丹诺的《大术》一书以菲洛[①]和塔塔里亚[②]的工作为基础，证明了这个方程有以下的著名解式 [见习题 2]：

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}. \tag{1.4}$$

请读者用 $x^3 = 6x + 6$ 去试一试.

这个公式出现大约 30 年后，庞贝利看出来它有一些奇怪的悖论式的地方. 首先注意，若直线 $y = 3px + 2q$ 适合 $p^3 > q^2$，则公式中出现复数. 例如庞贝利考虑了 $x^3 = 15x + 4$，得出

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

在图 1-3a 中，出现复数表示几何问题无解，但在图 1-3b 中，这条直线一定会与曲线相交！事实上，检验一下庞贝利的例子就会给出 $x = 4$.

庞贝利在与这个悖论斗争中，忽发"奇想"：如果在上式中设 $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + ni$，$\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - ni$，说不定就会给出 $x = 4$. 当然，为了使此法可行，他必须假设两个复数 $A = a + i\widetilde{a}$ 与 $B = b + i\widetilde{b}$ 的加法需服从一个似乎近情理的法则：

$$A + B = (a + i\widetilde{a}) + (b + i\widetilde{b}) = (a + b) + i(\widetilde{a} + \widetilde{b}). \tag{1.5}$$

其次，如果真正有一个值 n 能使 $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + ni$，他就必需去计算 $(2 + in)^3$. 为此，他假设可以像通常代数中那样把括号乘开，于是

$$(a + i\widetilde{a})(b + i\widetilde{b}) = ab + i(a\widetilde{b} + \widetilde{a}b) + i^2\widetilde{a}\widetilde{b}.$$

① Scipione del Ferro, 1465—1526, 意大利数学家. —— 译者注

② Tartaglia, 真名 Nicolo Fontana, 1500—1557, 意大利数学家, 他口吃, tartaglia 就是意大利语"口吃者". —— 译者注

利用 $i^2=-1$, 他得出结论说两个复数的乘积应由下式给出

$$AB=(a+i\widetilde{a})(b+i\widetilde{b})=(ab-\widetilde{a}\widetilde{b})+i(a\widetilde{b}+\widetilde{a}b). \tag{1.6}$$

这个法则判明了他的 "奇想" 胜利, 因为现在他能够证明 $(2+i)^3=2+11i$, 请自行验证.

尽管复数本身仍然是神秘的, 然而庞贝利关于三次方程的工作证实了, 完全实际的问题也需要用复算术来求解.

复数理论以后的发展, 也和它的诞生一样, 是与数学其他领域 (还有物理学) 的进展密不可分地联系在一起的. 令人遗憾的是, 我们在本书中只能稍微触及这些问题; 对于这方面有兴趣的读者, 可以在 Stillwell [1989] 中找到有关这些相互联系的完全的、引人入胜的讨论. 重复一下在序言中说过的, 把 Stillwell 的书与本书一起读, 其价值怎么估计也不过分.

1.1.3　一些术语和记号

现在, 我们把历史放在一边来介绍描述复数的现代术语和记号. 这些都概括在下表中, 并在图 1-4 中绘出.

名　　称	含　　意	记　　号
z 的模	z 的长度 r	$\lvert z\rvert$
z 的辐角	z 的角度 θ	$\arg(z)$
z 的实部	z 的 x 坐标	$\mathrm{Re}(z)$
z 的虚部	z 的 y 坐标	$\mathrm{Im}(z)$
虚数	i 的实数倍	
实轴	实数的集合	
虚轴 z	虚数的集合	
z 的复共轭	z 对实轴的反射	$\overline{z}$

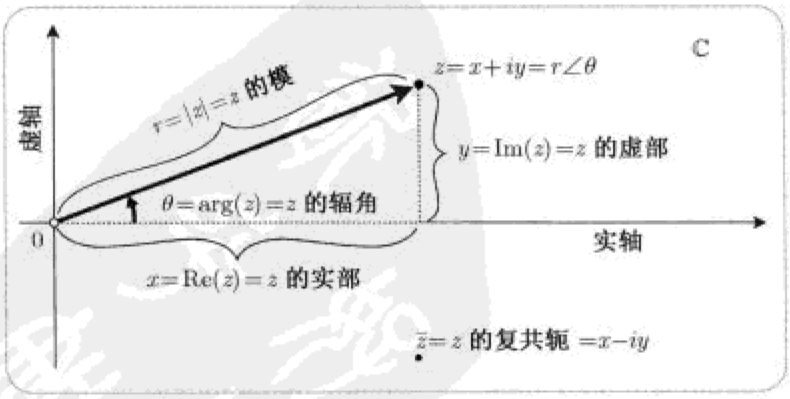


图　1-4

从一开始就把复数 (按几何观点) 看成一个不可分的整体 —— 即平面上一点, 是有好处的. 只有当我们用数值坐标来描述此点时, 复数才成为 “复合的” 数. 更准确地说, $\mathbb{C}$ 被说成是 2 *维的*, 意为需要两个实数 (即坐标) 来标记它, 至于如何标记, 则全由我们自己决定.

用笛卡儿坐标 (实部 x 与虚部 y) 把复数写成 $z = x + iy$, 只是标记方法之一. 当我们处理复数的加法时, 这是很自然的标记, 因为 (1.5) 式说明 $A + B$ 的实部和虚部正是由把 A 和 B 的实部和虚部分别相加而得.

但是在乘法情况下, 笛卡儿标记法就不再是自然的了, 因为它给出拖沓而且没有启发性的法则 (1.6). 简单得多的几何法则 (1.2) 使我们看得很清楚, 我们应该用*极坐标*来标志一个典型的点 $z : r = |z|$, $\theta = \arg z$. 我们现在可以把 z 写作 $z = r\angle\theta$ 而不是 $z = x + iy$, 这里符号 $\angle$ 是用于提醒我们 θ 是 z 的*角度*. [虽然现在还有人使用这种记号, 但是我们只是暂时用一下; 本章稍后我们将发现一个好得多的记号 (标准的记号), 而且本书以后就一直使用它.] 几何乘法法则 (1.2) 现在就有了简单的形式

$$(R\angle\phi)(r\angle\theta) = (Rr)\angle(\phi + \theta). \tag{1.7}$$

和笛卡儿标记 $x + iy$ 一样, 一个给定的极坐标标记 $r\angle\theta$ 就确定了一个唯一点, 但是 (与笛卡儿标记不同), 一个给定的点并没有一个唯一的极坐标标记. 因为任意两个相差 2π 的整数倍的角度表示同样的方向, 所以一个给定的点可以有无穷多个不同的标记:

$$\cdots = r\angle(\theta - 4\pi) = r\angle(\theta - 2\pi) = r\angle\theta = r\angle(\theta + 2\pi) = r\angle(\theta + 4\pi) = \cdots$$

当我们的学科逐步展开时, 关于角度的这个简单事实会越来越重要.

笛卡儿坐标和极坐标是标记复数最通常的方法, 但在第 3 章中我们将遇到一个特别有用的方法, “球极” 坐标.

1.1.4 练习

在继续往下读之前, 我们强烈建议你使自己对至今引入的概念、术语和记号彻底弄明白, 直到感到自如. 为此, 请试着用几何方法 (*以及/或者*用代数方法) 把下面每个事实都弄得确实无疑:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}[z + \overline{z}], \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}[z - \overline{z}], \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\tan[\arg z] = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}, \quad z\overline{z} = |z|^2, \quad r\angle\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

用关系式 $(1/z)z = 1$ 来定义 $\frac{1}{z}$, 可得 $\frac{1}{z} = \frac{1}{r\angle\theta} = \frac{1}{r}\angle(-\theta)$.

$$\frac{R\angle\phi}{r\angle\theta} = \frac{R}{r}\angle(\phi - \theta), \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$(1+i)^4=-4,\quad (1+i)^{13}=-2^6(1+i),$$

$$(1+i\sqrt{3})^6=2^6,\quad \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2}=-4i,\quad \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2}=-\sqrt{2}\angle-(\pi/12),$$
$$\overline{r\angle\theta}=r\angle(-\theta),\quad \overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2,\quad \overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2,\quad \overline{z_1/z_2}=\overline{z}_1/\overline{z}_2.$$

最后还有所谓的*广义三角不等式*

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|. \tag{1.8}$$

等号何时成立?

1.1.5 符号算术和几何算术的等价性

我们一直在交换地使用符号法则 (1.5)、(1.6) 与几何法则 (1.1)、(1.2), 现在我们要证明二者等价, 因此这种交换使用是合理的. 加法法则 (1.1) 与 (1.5) 的等价性对于学过向量的人是熟悉的, 对其他人, 不管怎么说, 验证一下也是直截了当的, 所以可以留给读者来做. 从而我们只来讨论乘法法则 (1.2) 与 (1.6) 等价.

我们先证明乘法的符号法则可以由几何法则导出. 为此我们先用一种特别有用的重要方法来重述几何法则 (1.7). 令 z 为 $\mathbb{C}$ 中一般的点并且考虑当用一个固定复数 $A=R\angle\phi$ 去乘它时, 它会变成什么. 按 (1.7), z 的长度将放大 R 倍, 而 z 的角度将增加一个 ϕ. 现在想象对平面的*每一点*都同时这样做:

从几何上看, 乘以复数$A=R\angle\phi$就是把平面旋转一个角 ϕ,

且放大一个因子R. (1.9)

需要提醒几点:

- 旋转与放大都以原点为中心.
- 先旋转再放大或者先放大再旋转都是一样.
- 如果 $R<1$, 所谓 "放大" 其实是缩小.

图 1-5 画出了这种变换的效果, 浅色的图形变成了深色的图形. 请自行验证, 在此例中 $A=1+i\sqrt{3}=2\angle\frac{\pi}{3}$.

现在, 从几何法则导出符号法则变成了一件简单的事. 回忆一下, 庞贝利导出 (1.6) 的关键步骤是: (i)$i^2=-1$; (ii) 可以把括号乘开, 即是说, 若 A, B, C 为复数, 则 $A(B+C)=AB+AC$. 我们已经看到了, 几何法则可以给出 (i); 图 1-5 则表明了, (ii) 也是成立的, 原因很简单: *旋转和放大都保持平行四边形不变*. 由加法的几何定义, $B+C$ 是一个平行四边形的第 4 个顶点, 而另外三个是 O, B, C. 为了证明 (ii), 只需要注意到, 用 A 去乘就是把这个平行四边形变成以 O, AB, AC 和 $A(B+C)$ 为顶点的另一个平行四边形. (1.6) 由此即可推出.

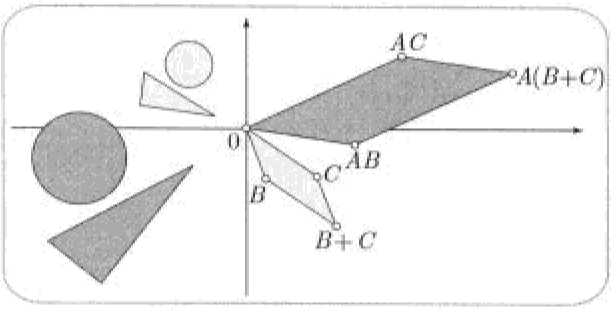


图 1-5

反过来, 我们现在证明几何法则也可由符号法则导出.①先考虑变换 $z \mapsto iz$. 按符号法则, 这意味着 $(x+iy) \mapsto (-y+ix)$, 图 1-6a 表明 iz 就是把 z逆时针方向转一个直角. 现在用这个事实来解释 A 为一般复数时, 变换 $z \mapsto Az$ 是什么, 以 $A = 4+3i = 5\angle\phi$ 为例就能很好地掌握它, 这里 $\phi = \tan^{-1}(3/4)$. 图 1-6b 就是这件事. 符号规则表明, 括号可以乘开, 所以我们的变换可以重写为

$$z \mapsto Az = (4+3i)z = 4z + 3(iz) = 4z + 3(z\text{旋转}\pi/2).$$

图 1-6c 画出了这些步骤. 我们现在看见了, 图 1-6c 和图 1-6b 中的阴影三角形是相似的, 所以用 $5\angle\phi$ 去乘就表示把平面旋转一个角度 ϕ 再按因子 5 放大. 证毕.

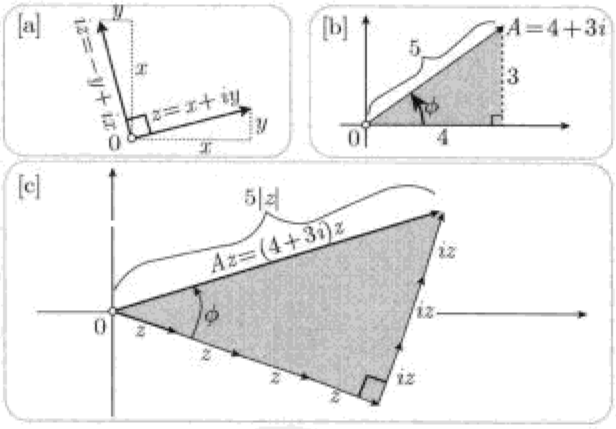


图 1-6

1.2 欧拉公式

1.2.1 引言

现在到了把 $r\angle\theta$ 换成一个好得多的记号的时候了, 这个记号基于一个奇迹似

① 在我们查阅过的所有教科书中, 这都是用三角恒等式来证明的. 我们相信, 现在的证法支持一个观点, 即这种恒等式只是复数乘法的简单法则的复杂化了的表现形式.

的公式

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}! \tag{1.10}$$

欧拉在 1740 年左右发现了它, 现在它被称为欧拉公式以纪念他.

在解释这公式之前, 我们先谈一下它的意义与用途. 正如图 1-7a 所示, 这个公式表明 $e^{i\theta}$ 是单位圆上辐角为 θ 的一点. 我们可以不再把复数写为 $z = r\angle\theta$, 而写为 $z = re^{i\theta}$, 具体说来, 要想达到 z, 必须先取指向 z 的单位向量 $e^{i\theta}$, 然后再把这向量拉长到 z. 这种表示法的好处就在于, 复数乘法的几何法则 (1.7) 现在成了几乎自明的事:

$$(Re^{i\phi})(re^{i\theta}) = Rre^{i(\theta+\phi)}.$$

换句话说, 对 $e^{i\theta}$ 作代数操作如同处理实函数 e^x 一样, 都可以得出关于复数为真的事实.

为了解释欧拉公式, 我们必须先处理一个更基本的问题: "$e^{i\theta}$ 是什么意思? " 令人吃惊的是, 许多作者的回答竟然是凭空地定义 $e^{i\theta}$ *就是* $\cos\theta + i\sin\theta$. 一开局就走这步棋, 如同开局就舍一个子一样, 在逻辑上是无懈可击的, 然而这又太小瞧了欧拉, 竟然把他的最伟大的成就之一当成了仅仅是变一个说法. 所以, 我们将要给出支持 (1.10) 式的两个启发式的论证, 更深刻的论证将在以后各章中出现.

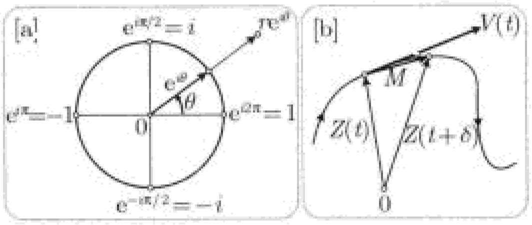


图 1-7

1.2.2 用质点运动来论证

回忆一下一个基本的事实: e^x 是其自身的导数: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. 这其实是一个可作定义用的事实, 即, 如果 $\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$ 而且 $f(0) = 1$, 则 $f(x) = e^x$. 与此类似, 如果 k 是一个实常数, 则 e^{kx} 可以由以下性质来定义: $\frac{d}{dx}f(x) = kf(x)$, 而且 $f(0) = 1$. 为了把通常的指数函数 e^x 从 x 的实值推广到虚数值, 我们可以抓住这一点不放, 坚持认定, 当 $k = i$ 时此式为真, 即

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it}. \tag{1.11}$$

我们使用了字母 t 代替 x, 因为我们现在认为自变量是*时间*. 我们已经习惯于把实函数的导数理解为函数图像的切线斜率, 但是怎样理解上式中的求导呢?

为了弄清楚这样做的意义, 想象一个点沿 $\mathbb{C}$ 中一曲线运动. 见图 1-7b. 这个点的运动可以用*参数*表述为, 此点在时刻 t 的位置是一复数 $Z(t)$. 再回想一下, 在物

理学中说过, 速度 $V(t)$ 是一个向量 (现在把向量想作复数) 其长度是动点的瞬时速率, 方向是其瞬时运动方向 (即与轨迹相切), 图 1-7b 上给出了该点在时刻 t 与 $t+\delta$ 之间的运动 (即位移)M, 于是很清楚

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t)=\lim_{\delta\to 0}\frac{Z(t+\delta)-Z(t)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{M}{\delta}=V(t).$$

所以, 给定了一个实自变量 t 的复函数 $Z(t)$, 我们总可以把 Z 可视地看作一个动点的位置, 而 $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}$ 是其速度.

我们现在就用这个想法在 $Z(t)=\mathrm{e}^{it}$ 的情况下求其轨迹. 见图 1-8. 按 (1.11) 式

$$\text{速度}=V=iZ=\text{位置逆时针旋转一个直角}.$$

因为此点的初始位置是 $Z(0)=\mathrm{e}^0=1$, 所以初速度是 i, 且垂直向上运动. 几分之一秒后, 此点将沿此方向稍微动一点, 而其新速度将与新位置向量成直角. 按此法来构造运动, 很清楚, 此点将沿单位圆运行.

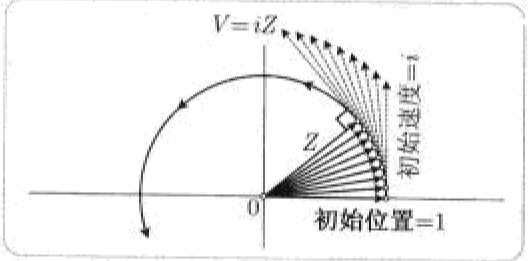


图 1-8

因为我们知道在整个运动过程中 $|Z(t)|$ 一直为 1, 所以该点的速度 $|V(t)|=1$. 于是在时间 $t=\theta$ 以后, 此点将在单位圆上运行一个距离 θ, 所以 $Z(\theta)=\mathrm{e}^{i\theta}$ 的辐角为 θ. 这就是欧拉公式的几何表述.

1.2.3 用幂级数来论证

为了作第二个论证, 我们先用幂级数来重新表述上面作为定义的性质: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=f(x)$, $f(0)=1$. 设 $f(x)$ 可以表为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 的形式, 经简单计算可以证明

$$\mathrm{e}^x=f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

进一步的研究则可证明这个级数对 x 的一切 (实) 值都收敛.

图 1-9 画出了当 x 为实值 θ 时, 这个和是水平轴上实数的无穷和. 为了使 $\mathrm{e}^{i\theta}$ 有意义, 我们仍坚持用这个级数, 但令 $x=i\theta$:

$$\mathrm{e}^{i\theta}=1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots,$$

图 1-9 则表明这个级数与 e^θ 的级数同样有意义. 但是各项并不具有相同方向, 而是每一项的方向都是前一项的方向旋转了一个直角, 成了某种螺旋线.

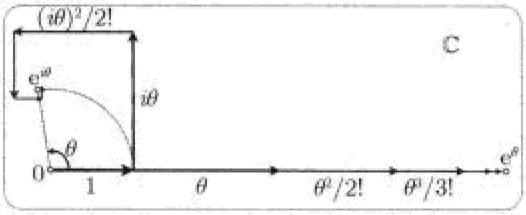


图 1-9

这个图像使我们看得很清楚, 已知 e^θ 级数的收敛性, 即可保证 $e^{i\theta}$ 的螺旋级数也收敛于 $\mathbb{C}$ 的某一定点. 然而并不清楚它会收敛于单位圆上角度为 θ 的点. 为了证明这一点, 我们把这条螺旋形线分为其实部和虚部:

$$e^{i\theta} = C(\theta) + iS(\theta),$$

这里

$$C(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots, \quad S(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots.$$

至此我们本可借助泰勒定理证明 $C(\theta)$ 与 $S(\theta)$ 就是 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的幂级数, 从而证明欧拉公式. 但是我们也可以用以下的不需泰勒定理的初等方式得到同样的结果.

关于 $e^{i\theta} = C(\theta) + iS(\theta)$, 我们想证两件事: (i) 它有单位长; (ii) 它的角度为 θ. 为证明这两点, 首先注意到, 对 C 和 S 的幂级数求导可得到

$$C' = -S, \quad S' = C,$$

这里, 一撇表示对 θ 求导.

为了证 (i), 注意

$$\frac{d}{dt}|e^{i\theta}|^2 = (C^2 + S^2)' = 2(CC' + SS') = 0,$$

这意味着 $e^{i\theta}$ 之长与 θ 无关. 但因为 $e^{i0} = 1$, 所以对一切 θ 有 $|e^{i\theta}| = 1$.

为了证明 (ii), 用 $\Theta(\theta)$ 记 $e^{i\theta}$ 的角度, 我们要证 $\Theta(\theta) = \theta$, 所以

$$\tan\Theta(\theta) = \frac{S(\theta)}{C(\theta)}.$$

因为我们已知 $C^2 + S^2 = 1$, 可知上式左方的导数是

$$[\tan\Theta(\theta)]' = (1 + \tan^2\Theta)\Theta' = \left(1 + \frac{S^2}{C^2}\right)\Theta' = \frac{\Theta'}{C^2},$$

而右方的导数则为

$$\left[\frac{S}{C}\right]' = \frac{S'C - C'S}{C^2} = \frac{1}{C^2}.$$

所以

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \Theta' = 1,$$

此式表明 $\Theta = \theta + const.$, 取 $e^{i0} = 1$ 的辐角为 0, [如果取为 2π, 有没有任何几何上的差别?] 我们得到 $\Theta = \theta$.

我们现可得到结论, 即 (不需泰勒公式)$C(\theta)$ 和 $S(\theta)$ 就是 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的幂级数, 虽然这个结论对于我们的目的只是附带的而已.

1.2.4　用欧拉公式来表示正弦和余弦

欧拉公式的一个简单然而重要的结论是：正弦和余弦可以用指数函数构造出来. 准确地说, 检查一下图 1-10, 可见得

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta\,, \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta,$$

或者与此等价有

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{1.12}$$

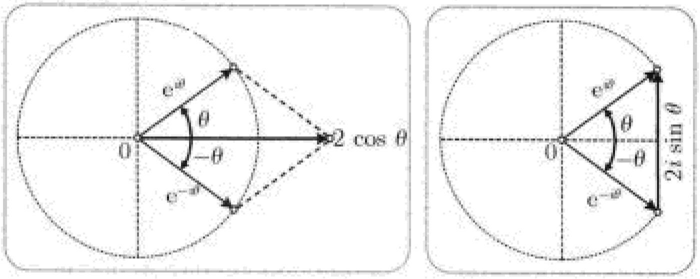


图　1-10

1.3　一 些 应 用

1.3.1　引言

有些问题通常看起来并不涉及复数, 然而透过复数的眼睛来观看它们, 却可以得到最漂亮的解法. 本节中我们将通过选自各个数学领域的许多例子来说明这一点. 本章末的习题中还有更多的例子.

第一个例子 [三角] 只是说明了已有的概念的力量, 而在其他例子中将要展开重要的新思想.

1.3.2 三角

所有的三角恒等式都可以看作是来自复数的乘法法则. 在下面的例子里, 为了避免符号太冗长, 我们将采用一种速写法：大写的 $C \equiv \cos\theta$, $S \equiv \sin\theta$, 小写的 $c \equiv \cos\phi$, $s \equiv \sin\phi$.

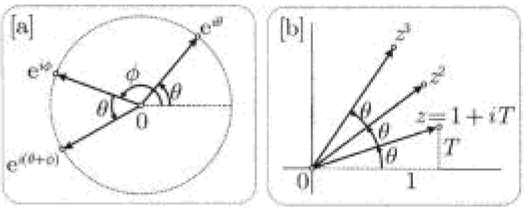


图 1-11

为了得出 $\cos(\theta+\phi)$ 的恒等式, 把它看作是 $e^{i(\theta+\phi)}$ 的一个分量, 见图 1-11a. 因为

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)&=e^{i(\theta+\phi)}=e^{i\theta}e^{i\phi}\\&=(C+iS)(c+is)\\&=[Cc-Ss]+i[Sc+Cs],\end{aligned}$$

我们就不但得出了 $\cos(\theta+\phi)$ 的恒等式, 还得出了 $\sin(\theta+\phi)$ 的恒等式：

$$\cos(\theta+\phi)=Cc-Ss,\quad \sin(\theta+\phi)=Sc+Cs.$$

这里又表现出使用复数的另一个强大的特点：每个复的等式都同时表述了两件事.

要想同时得到 $\cos 3\theta$ 和 $\sin 3\theta$ 的恒等式, 请考虑 $e^{i3\theta}$：

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=e^{i3\theta}=(e^{i\theta})^3=(C+iS)^3=[C^3-3CS^2]+i[3C^2S-S^3].$$

利用 $C^2+S^2=1$, 这些恒等式就可写为比较常见的形式：

$$\cos 3\theta=4C^3-3C,\quad \sin 3\theta=-4S^3+3S.$$

我们刚才看到怎样用 θ 的三角函数的幂来表示 θ 的倍角的三角函数, 但是我们也可以反向进行. 举一个例子, 假设我们想用 θ 的倍角三角函数表示 $\cos^4\theta$, 因为 $2\cos\theta=e^{i\theta}+e^{-i\theta}$, 所以

$$\begin{aligned}2^4\cos^4\theta&=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4\\&=(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta})+4(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta})+6\\&=2\cos 4\theta+8\cos 2\theta+6\\\Rightarrow \cos^4\theta&=\frac{1}{8}[\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3].\end{aligned}$$

虽然欧拉公式在作这类计算时极为方便, 却不是必不可少: 我们实际上用到的只是复数乘法的几何形式与符号形式的等价性. 为了强调这一点, 我们不用欧拉公式来再作一个例子.

为了找一个恒等式来用 $T=\tan\theta$ 表示 $\tan 3\theta$. 考虑 $z=1+iT$, 见图 1-11b. 因为 z 的角度是 θ, z^3 的角度就是 3θ, 所以 $\tan 3\theta = \mathrm{Im}(z^3)/\mathrm{Re}(z^3)$. 所以

$$z^3=(1+iT)^3=(1-3T^2)+i(3T-T^3)\Rightarrow \tan 3\theta=\frac{3T-T^3}{1-3T^2}$$

1.3.3 几何

我们以单个例子来作为几何应用讨论的基础. 在图 1-12a 中, 我们在一任意四边形的四个边上各作一个正方形. 我们想证明此图中明显给出的事实: **连接相对的正方形中心的线段互相垂直并等长.** ①要想找出这个令人惊奇的结果纯粹的几何证明, 需要极大的才能. 所以我们不要单靠自己的智慧, 还是祈求复数的智慧来帮助我们吧!

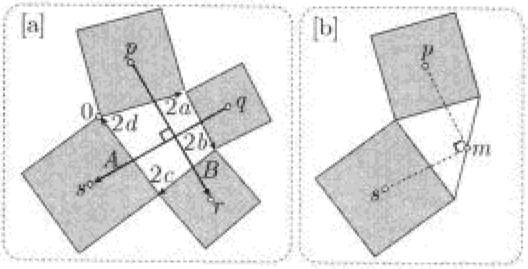


图 1-12

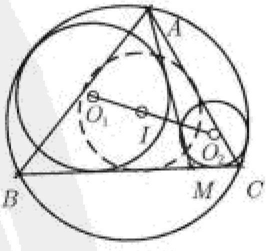
为方便起见, 引入因子 2, 并令 $2a, 2b, 2c, 2d$ 为表示四边形 4 边的复数. 唯一的条件是这个四边形要封口, 即

$$a+b+c+d=0.$$

如图 1-12a 所示, 取 $2a$ 开始的顶点为 $\mathbb{C}$ 的原点. 要想走到这一边的正方形中心 p, 就要先走一个 a, 再沿与 a 成直角 (逆时针) 的方向走过同样的距离. 这样, 由于 ia 正是 a 依逆时针方向旋转一个直角而得, 所以 $p=a+ia=(1+i)a$. 同理

① 这是著名的 Thebault 问题. Victor Thebault 是法国几何学家, 他在 1938 年提出了 3 个问题. 这里是第一个, 其中最难的是著名的 Thebault 第三问题: 如图作 3 个圆, 外圆是外接圆, 内心是 I, 求证 O_1, I, O_2 三点共线, 其中 O_1, O_2 是图上 2 个切圆圆心. 直到 1983 年 (或 1973 年) 才有人给出了解答, 但因太长, 人们都认为初等解法尚属未知. 请参看 S. Gueron, *Two applications of the generalized Ptolemy theorem*, American Math. Monthly, Vol.109, (2002), 362-370. 关于另外两个 Thébault 问题可见 A. Bogomolny. *Thebault's problem*, I, II, III, www.cut-the-knot.org/curriculum/thebault 1(或 2, 3).

—— 译者注



Thebault 第三问题

$$q = 2a + (1+i)b, \quad r = 2a + 2b + (1+i)c, \quad s = 2a + 2b + 2c + (1+i)d$$

所以由 q 到 s 的复数 $A = s - q$ 和由 p 到 r 的复数 $B = r - p$ 就是

$$A = (b + 2c + d) + i(d - b), \quad B = (a + 2b + c) + i(c - a).$$

我们想要证明 A 和 B 互相垂直且等长. 这两个命题可以合并成单个复命题 $B = iA$, 即 B 可以由 A 依逆时针方向旋转 $\pi/2$ 而得. 这也就是 $A + iB = 0$, 而后者可以归结为例行的计算而结束证明:

$$A + iB = (a + b + c + d) + i(a + b + c + d) = 0.$$

对图 1-12a 的结果作纯粹几何解释的第一步是考虑图 1-12b. 图中在一任意三角形的两边上各作一个正方形, 由图中可以得到: *连接这两个正方形中心到三角形另一边的中点 m 的两个线段互相垂直而且等长*. 习题 21 将证明图 1-12a 可以很快地由图 1-12b 得出[1]. 图 1-12b 的结果当然可以用上面同样的方法来证明, 但是让我们试一试找出一个纯粹几何的证法.

为此我们故意绕一个有趣的弯子, 即用复函数来研究平面上的平移与旋转. 事实上, 这个 "弯子" 本身比我们打算用它来解决的几何难题重要得多.

用 $\mathcal{T}_v$ 记平面上平移一个向量 (亦即复数)v, 所以一般的 z 点被它映为 $\mathcal{T}_v(z) = z + v$. 图 1-13a 画出了平移对于一个三角形的效果. $\mathcal{T}_v$ 的逆, 记作 $\mathcal{T}_v^{-1}$ 就是解除这个平移的变换; 更形式化的方法是按照关系式 $\mathcal{T}_v^{-1} \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{E} = \mathcal{T}_v \circ \mathcal{T}_v^{-1}$ 来定义 $\mathcal{T}_v^{-1}$, 这里的 $\mathcal{E}$ 就是 "什么都不变" 的变换 (称为*恒等变换*), 它把每一点映为其自身: $\mathcal{E}(z) = z$. 很明显, $\mathcal{T}_v^{-1} = \mathcal{T}_{-v}$.

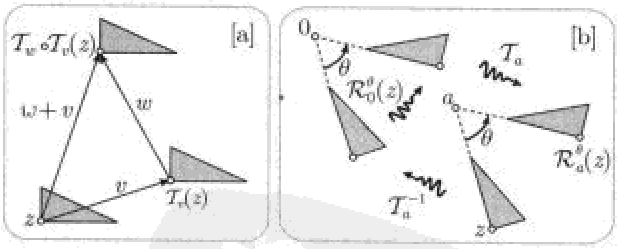


图 1-13

如果我们先作一个 $\mathcal{T}_v$, 接着再来一平移 $\mathcal{T}_w$, 则复合的平面映射 $\mathcal{T}_w \circ \mathcal{T}_v$ 将是另一个平移:

$$\mathcal{T}_w \circ \mathcal{T}_v(z) = \mathcal{T}_w(z + v) = z + (w + v) = \mathcal{T}_{w+v}(z).$$

这使我们得到关于加法的一个有趣的启发. 如果我们在引进复数 v 时, 认为它*就是*一个平移, 则我们可以定义两个复数 $\mathcal{T}_v$ 与 $\mathcal{T}_w$ 之 "和" 就只是相继施行这两个平移 (次序无关). 这当然与我们实际给出的加法的定义等价.

① 这个方法基于一篇文章 Finney [1970].

令 $\mathcal{R}_a^\theta$ 表示平面绕 a 点旋转一个角度 θ. 例如, $\mathcal{R}_a^\phi \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{R}_a^{\phi+\theta}$, $(\mathcal{R}_a^\theta)^{-1} = \mathcal{R}_a^{-\theta}$. 为了把旋转表示为复函数, 第一步是注意, (1.9) 表明绕原点的旋转可以写为 $\mathcal{R}_0^\theta(z) = \mathrm{e}^{i\theta} z$.

图 1-13b 表明, 一般的旋转 $\mathcal{R}_a^\theta$ 可以这样作：先把 a 平移到 0, 绕 0 旋转 θ, 再把 0 平移回 a:

$$\mathcal{R}_a^\theta(z) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{R}_0^\theta \circ \mathcal{T}_a^{-1})(z) = \mathrm{e}^{i\theta}(z-a) + a = \mathrm{e}^{i\theta} z + k\ ,$$

其中 $k = a(1-\mathrm{e}^{i\theta})$. 这样, 我们发现绕任意点的旋转都可以表示为绕原点作同样的旋转, 再继以一个平移：$\mathcal{R}_a^\theta = (\mathcal{T}_k \circ \mathcal{R}_0^\theta)$. 反过来, 绕原点旋转 α 再继以平移 v 又可化为单个旋转：

$$\mathcal{T}_v \circ \mathcal{R}_0^\alpha = \mathcal{R}_c^\alpha, \quad \text{其中} \quad c = v/(1-\mathrm{e}^{i\alpha}).$$

同样, 可以很容易地验证, 如果在旋转之前就作平移, 则净变换仍可以用一个旋转来完成：$\mathcal{R}_0^\theta \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{R}_p^\theta$. p 是什么?

刚才得到的结果在几何上肯定不是明显的 [请试一试], 但这样做足以表明, 把旋转和平移都用复函数来表示是多么有力. 作为进一步的说明, 考虑绕不同点作两个旋转的净效果. 把旋转用复函数表示出来, 经简单计算 [练习] 即有

$$(\mathcal{R}_b^\phi \circ \mathcal{R}_a^\theta)(z) = \mathrm{e}^{i(\theta+\phi)} z + v, \quad \text{其中} \quad v = a\mathrm{e}^{i\phi}(1-\mathrm{e}^{i\theta}) + b(1-\mathrm{e}^{i\phi}).$$

除非 $\theta+\phi$ 是 2π 的整数倍, 否则由上一段可知

$$\mathcal{R}_b^\phi \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{R}_c^{(\theta+\phi)}, \quad \text{其中} \quad c = \frac{v}{1-\mathrm{e}^{i(\theta+\phi)}} = \frac{a\mathrm{e}^{i\phi}(1-\mathrm{e}^{i\theta}) + b(1-\mathrm{e}^{i\phi})}{1-\mathrm{e}^{i(\theta+\phi)}}.$$

[如果 $b=a$ 或 $\phi=0$, c 应该是什么? 请验算一下此公式.] 结果见图 1-14a. 我们以后还会找出这个结果的一个纯几何的解释, 而且在此过程中找出上述复杂公式所表示的 c 的一个很简单的几何构造.

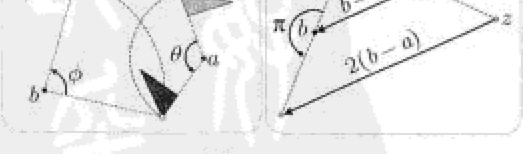


图 1-14

另一方面, 如果 $(\theta+\phi)$ 是 2π 的整数倍, 则 $\mathrm{e}^{i(\theta+\phi)} = 1$, 而

$$\mathcal{R}_b^\phi \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{T}_v, \quad \text{其中} \quad v = (1-\mathrm{e}^{i\phi})(b-a).$$

例如, 设 $\theta=\phi=\pi$, 这个结果预示 $\mathcal{R}_b^{\pi}\circ\mathcal{R}_a^{\pi}=\mathcal{T}_{2(b-a)}$ 就是按连接第一个旋转中心到第二个旋转中心的复数的 2 倍作平移. 可以由图 1-14b 直接看出此事为真.

以上关于两个旋转的复合的结果意味着 [练习]:

> 令 $\mathcal{M}=\mathcal{R}_{a_n}^{\theta_n}\circ\cdots\circ\mathcal{R}_{a_2}^{\theta_2}\circ\mathcal{R}_{a_1}^{\theta_1}$ 为 n 个旋转的组合, 又令 $\Theta=\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$ 为净旋转量. 一般来说, 存在某个复数 c, 使 $\mathcal{M}=\mathcal{R}_c^{\Theta}$, 但若 Θ 是 2π 的整数倍, 则必存在某个 v, 使 $\mathcal{M}=\mathcal{T}_v$.

回到我们原来的问题, 现在就可以给图 1-12b 的结果一个漂亮的几何解释. 在图 1-15a 中, $\mathcal{M}=\mathcal{R}_m^{\pi}\circ\mathcal{R}_p^{(\pi/2)}\circ\mathcal{R}_s^{(\pi/2)}$. 根据刚才的结果, $\mathcal{M}$ 是一个平移. 为弄明白是什么平移, 我们只需找到 $\mathcal{M}$ 对某单个点的效果就行了. 很明显, $\mathcal{M}(k)=k$, 因此 $\mathcal{M}$ 是一个零平移, 即恒等变换 $\mathcal{E}$. 所以

$$\mathcal{R}_p^{(\pi/2)}\circ\mathcal{R}_s^{(\pi/2)}=(\mathcal{R}_m^{\pi})^{-1}\circ\mathcal{M}=\mathcal{R}_m^{\pi}.$$

如果我们定义 $s'=\mathcal{R}_m^{\pi}(s)$, 则 m 是 ss' 的中点. 但另一方面

$$s'=(\mathcal{R}_p^{(\pi/2)}\circ\mathcal{R}_s^{(\pi/2)})(s)=\mathcal{R}_p^{(\pi/2)}(s),$$

所以 sps' 是一个等腰三角形而且在 p 点处为直角, 所以 sm 与 pm 互相垂直且等长. 证毕.

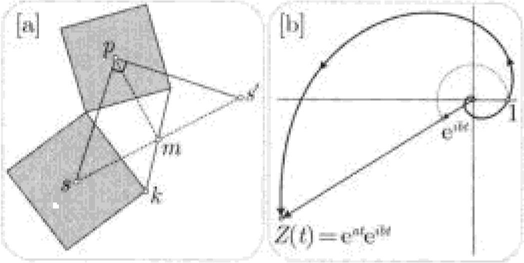


图 1-15

1.3.4 微积分

考虑求 $e^x\sin x$ 的第 100 阶导数, 并以此作为微积分的例子. 更一般地说, 我们将要说明怎样用复数来求 $e^{ax}\sin bx$ 的 n 阶导数.

我们在讨论欧拉公式时就已看到, e^{it} 可以看成是一个点以单位角速度绕单位圆运行时在时刻 t 的位置. 同样, e^{ibt} 可以看成是一个单位复数以角速度 b 绕原点运行. 如果我们把单位复数在其旋转中伸长 e^{at} 倍, 它的端点就描绘了一个点螺旋环绕着离开原点. 见图 1-15b.

这件事对于待解决的问题的意义在于: 此点在时刻 t 的位置是

$$Z(t)=e^{at}e^{ibt}=e^{at}\cos bt+ie^{at}\sin bt,$$

所以 $e^{at}\sin bt$ 的导数恰为 Z 的速度 V 的垂直分量 (即虚分量).

我们本可以对上式给出的 Z 的两个分量求导来求出 V, 但是我们想利用这个例子来介绍本书中一直会使用的几何方法. 在图 1-16 中, 考虑该点在时刻 t 与 $t+\delta t$ 之间的运动 $M = Z(t+\delta t) - Z(t)$.

回忆一下, V 的定义是当 δ 趋向零时 (M/δ) 的极限, 所以当 δ 非常小时, V 和 (M/δ) 很接近于相等. 这就提示我们两种直观的说法, 而本书中, 这两种说法都将采用: (i) 当 δ 为无穷小时 $V = (M/\delta)$; 或者说 (ii)V 与 (M/δ) 最终相等 (当 δ 趋于零时).

我们这里要强调, “最终相等” 和 “无穷小” 这些词语都是在一种确定的技术意义下使用的, 特别是 “无穷小” 一词指的并不是某种神秘的、无限小的量[1]. 更准确地说, 如果两个量 X 和 Y 都依赖于第三个量 δ, 则

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{X}{Y} = 1 \Leftrightarrow \text{“对于无穷小的 } \delta, X = Y\text{”}.$$
$$\Leftrightarrow \text{“当 } \delta \text{ 趋于 0 时 } X \text{ 和 } Y \text{ 最终相等”}.$$

由极限的基本定理可知: “最终相等” 保存了通常的相等的许多性质. 例如, 因为 V 与 (M/δ) 最终相等, 所以 $V\delta$ 与 M 也最终相等.

现在回到求螺旋环绕的点的速度问题. 图 1-16 上画出了由 0 到 $Z(t)$ 和 $Z(t+\delta)$ 的射线以及经过这两点的 (以 0 为中心的) 圆弧 (虚线). 令 A 和 B 为连接 $Z(t)$ 到这两射线与圆弧的交点的复数. 如果 δ 是无穷小, 则 B 与 A 以及 B 与 Z 均成直角, 而且 $M = A + B$.

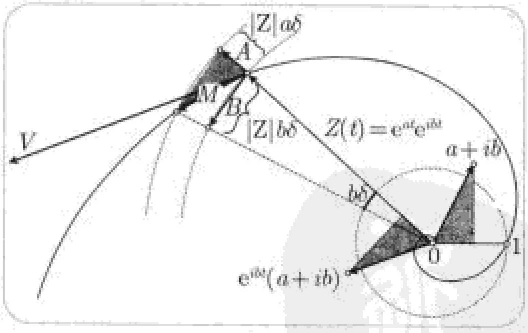


图　1-16

现在我们来求 A 和 B 的最终长度. 在时间区间 δ 内, Z 的辐角增加 $b\delta$(按弧度计), 所以这两条射线在单位圆上切下长为 $b\delta$ 的弧, 而在过 Z 的圆上切下长为 $|Z|b\delta$ 的弧. 所以 $|B|$ 最终等于 $|Z|b\delta$. 其次, 注意到 $|A|$ 是 $|Z(t)|$ 在时间区间 δ 中的增量. 这样, 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Z(t)| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{at} = a|Z|,$$

① 在 Chandrasekhar [1995] 中有更多关于这种差别的讨论.

所以 $|A|$ 最终等于 $|Z|a\delta$.

在 Z 处的阴影三角形最终相似于斜边为 $a+ib$ 的阴影直角三角形. 把后者旋转 Z 的辐角, 就会看到, 若 δ 为无穷小, 则

$$M=(a+ib)\text{旋转}Z\text{的辐角并放大}|Z|\delta\text{倍}=(a+ib)Z\delta$$
$$\Rightarrow V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z=(a+ib)Z. \tag{1.13}$$

这样, 所有从原点出发的射线都以相同角度 [$(a+ib)$ 的辐角] 与螺旋线相交, 而点的速率正比于由原点到该点的距离.

注意, 我们虽然尚未给出 e^z 的意义 (z 是一般复数), 但肯定很想把它写成 $Z(t)=\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{ibt}=\mathrm{e}^{(a+ib)t}$, 这使 (1.13) 式显得十分自然. 反过来, 这就提醒我们应该定义$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{(x+iy)}$ 为 $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy}$; 在下一章还会给出这一步的另一种论证.

利用 (1-13) 式就很容易求更高阶导数了. 例如点的加速度是

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}Z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V=(a+ib)^2Z=(a+ib)V.$$

继续这样做下去, 每个新导数都可由前一个导数乘以 $(a+ib)$ 而得 [请试着在图 1-16 中画出各阶导数的草图]. 如果写成 $(a+ib)=R\mathrm{e}^{i\phi}$, 其中 $R=\sqrt{a^2+b^2}$, ϕ 是 $\tan^{-1}(b/a)$ 的适当的值, 我们就有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}Z=(a+ib)^nZ=R^n\mathrm{e}^{in\phi}\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{ibt}=R^n\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{i(bt+n\phi)},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\mathrm{e}^{at}\sin bt\right]=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{at}\sin\left[bt+n\tan^{-1}(b/a)\right]. \tag{1.14}$$

1.3.5 代数

科茨[1]在他的卒年 (1716) 有一个了不起的发现, 使他能 (在原则上) 积出一族积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n-1},$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$. 为了看出这个发现与代数的联系, 考虑 $n=2$ 的情况. 关键性的一点是他看到分母 (x^2-1) 可以因式分解为 $(x-1)(x+1)$, 而被积式可以分为部分分式 (partial fraction, 或译分项分式), 从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{x-1}{x+1}\right].$$

我们将会看到, 对更高的次数 n, 若不用复数, 则 (x^n-1) 不能完全因式分解为线性因式. 而在 1716 年复数还是一种罕见并且可疑的玩意! 然而, 科茨看到, 如

① Roger Cotes, 1682—1716, 英国数学家, 牛顿的《原理》第 2 版的著名编者. —— 译者注

果能把 (x^n-1) 剖开成实的线性和二次因式, 则他就能算出积分. 这里所谓 "实二次因式" 就是系数全为实数的二次式.

例如, (x^4-1) 可以分解为 $(x-1)(x+1)(x^2+1)$, 于是可得如下形式的部分分式

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx}{x^2+1}+\frac{D}{x^2+1},$$

所以其积分可用 ln 与 $\tan^{-1}$ 来计算. 更一般地, 即使因式分解中有比 (x^2+1) 更复杂的二次式, 也很容易证明只需用 ln 与 $\tan^{-1}$ 就能算出所得的积分.

为把科茨关于 (x^n-1) 的工作放在一个较宽广的背景下来考察, 我们要考察多项式的根和因式分解之间的联系, 这个联系可以由考察几何级数

$$G_{m-1}=c^{m-1}+c^{m-2}z+\cdots+cz^{m-2}+z^{m-1}$$

来解释, 这里 c 与 z 都是复数. 和实代数一样, 要求此级数的和只须注意到 zG_{m-1} 和 cG_{m-1} 包含几乎相同的项 —— 如果一下子看不出来, 请以 $m=4$ 为例试一下. 把这两个式子相减可得

$$(z-c)G_{m-1}=z^m-c^m, \tag{1.15}$$

所以

$$G_{m-1}=\frac{z^m-c^m}{z-c}.$$

如果我们认为 c 是固定的而 z 为变量, 则 (z^m-c^m) 是 z 的 m 次多项式, 且 $z=c$ 是一个根. 结果 (1.15) 表明, 这个 m 次多项式可以分解为一个线性因式 $(z-c)$ 和一个 $(m-1)$ 次多项式 G_{m-1} 的乘积.

笛卡儿在 1637 年发表了这个结果的一个重要推广. 令 $P_n(z)$ 为一个一般的 n 次多项式:

$$P_n(z)=z^n+Az^{n-1}+\cdots+Dz+E,$$

其系数 $A,\cdots,E$ 可以是复数. 因为 (1.15) 蕴含了

$$P_n(z)-P_n(c)=(z-c)\left[G_{n-1}+AG_{n-2}+\cdots+D\right],$$

我们就得到了笛卡儿因式定理, 并把根的存在与作因式分解的可能性联系起来:

若 c 是 $P_n(z)=0$ 的一个解, 则 $P_n(z)=(z-c)P_{n-1}$, 其中 P_{n-1} 是 $(n-1)$ 次多项式.

如果我们能再找到 P_{n-1} 的一个根 c', 则由同样的推理又有 $P_n=(z-c)(z-c')P_{n-2}$. 这样做下去, 笛卡儿定理使得有望把 P_n 恰好分解为 n 个线性因式:

$$P_n(z)=(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_n). \tag{1.16}$$

如果我们不承认复根的存在 (18 世纪早期人们就是这样的), 则这种因式分解有时可能 (例如 z^2-1), 有时又不可能 (例如 z^2+1). 但是与此形成鲜明对照的是, 如果承认复数, 则可以证明 *P_n在$\mathbb{C}$中恒有n个根, 而因式分解(1.16)恒为可能*. 这称为**代数的基本定理**, 我们将在第 7 章中解释它何以为真.

(1.16) 中的每个因式 $(z-c_k)$ 表示一个把根 c_k 与变量点 z 连接起来的复数. 图 1-17a 演示一个一般的三次多项式. 把每一个这样的复数都写成 $R_k e^{i\phi_k}$, (1.16) 式就有了一个更生动的形式

$$P_n(z) = R_1 R_2 \cdots R_n e^{i(\phi_1+\phi_i+\cdots+\phi_k)}.$$

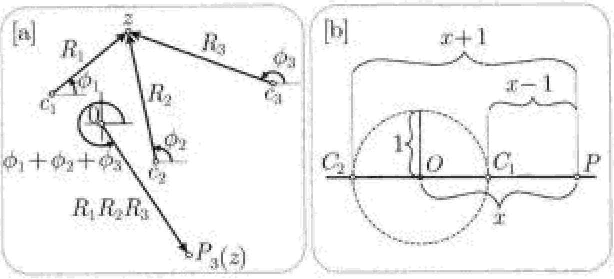


图 1-17

虽然科茨那时远不知道代数的基本定理, 但我们可以看一下, 这个定理如何保证了他在把 x^n-1 分解为实线性因式和实二次因式的征程中得到成功的. 科茨的多项式具有实系数, 而且我们可以一般地证明

> *若一多项式具有实系数, 则其复根必为成对复共轭的, 而它可以分解为实的线性因式和实二次因式.*

因为如果 $P_n(z)$ 的系数 $A, \cdots, E$ 都是实的, 则 $P_n(c)=0$ 必意味着 $P_n(\overline{c})=0$[练习], 而因式分解 (1.16) 中必含有因式

$$(z-c)(z-\overline{c}) = z^2-(c+\overline{c})z+c\overline{c} = z^2-2\mathrm{Re}(c)z+|c|^2,$$

而它是一个实二次式.

现在我们来讨论科茨如何借助*正 n 边形的几何来把* x^n-1 分解为实线性因式与实二次式因式. 为了领略下面的讨论, 请设身处地, 穿上 18 世纪的服装, 把刚才学到的代数基本定理忘掉; 甚至把复数和复平面全都忘掉!

对于开始的几个 n 值, 找出 $U_n(x)=x^n-1$ 的所期望的因式分解不算太难:

$$U_2(x) = (x-1)(x+1), \tag{1.17}$$

$$U_3(x) = (x-1)(x^2+x+1), \tag{1.18}$$

$$U_4(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1), \tag{1.19}$$

$$U_5(x) = (x-1)\left(x^2 + \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]x + 1\right)\left(x^2 + \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]x + 1\right),$$

但是一般的模式则很难捉摸.

想要找出这样一个模式, 我们试着把最简单的情况 (1.17) 可视化, 见图 1-17b. 令 O 为平面 (不把它看作 $\mathbb{C}$) 中一直线上的定点, P 为其上的动点, 而用 x 记两点的距离 OP. 如果我们现在以 O 为中心作单位圆, C_1, C_2 为它与此直线的交点①, 显然 $U_2(x) = PC_1 \cdot PC_2$.

为了在此精神下理解二次因式, 我们跳过 (1.18), 进到含有较简单的二次式的 (1.19) 式. $U_4(x)$ 的因式分解是我们不用复数就能得到的最好的分解了, 但是我们的理想还是想把 $U_4(x)$ 分解为4 个线性因式, 这就启示我们把 (1.19) 重写为

$$U_4(x) = (x-1)(x+1)\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1},$$

并把后两个 "因式" 类比为真正的线性因式. 如果我们想 (类比于前一情况) 把它解释为 P 到 4 个定点的距离之积, 则相应于后两个 "因式" 的点必位于直线之外. 更准确地说, 毕达哥拉斯定理告诉我们, 距 P 为 $\sqrt{x^2+1^2}$ 的点必在与直线 OP 成直角的方向上且与 O 的距离为 1 处. 参照图 1-18a, 可见 $U_4(x) = PC_1 \cdot PC_2 \cdot PC_3 \cdot PC_4$, 而 $C_1C_2C_3C_4$ 就是图上画的内接于圆的正方形.

既然我们已经借助于正四边形 (即正方形) 将 $U_4(x)$ 作了因式分解, 说不定也可以用正三边形 (即等边三角形) 将 $U_3(x)$ 作因式分解. 见图 1-18b, 把毕达哥拉斯定理用于此图即有

$$\begin{aligned} PC_1 \cdot PC_2 \cdot PC_3 = PC_1 \cdot (PC_2)^2 &= (x-1)\left(\left[x+\frac{1}{2}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2\right) \\ &= (x-1)(x^2+x+1), \end{aligned}$$

这正是想要证明的 $U_3(x)$ 的因式分解 (1.18)!

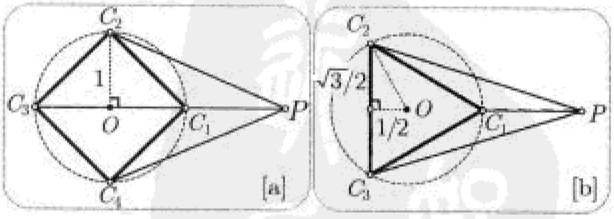


图　1-18

于是有一个关于 $U_n(x)$ 的合情理的推广出现了:

若 $C_1C_2C_3\cdots C_n$ 是内接于以 O 为中心的单位圆的正 n 边形, P 是直线 OC_1 上与 O 的距离为 x 的一点, 则

$$U_n(x) = PC_1 \cdot PC_2 \cdot \cdots \cdot PC_n.$$

① 这里和以下, 我们为简单起见, 设 $x > 1$, 使得 $U_n(x)$ 为正.

这就是科茨的结果. 不幸的是, 他只提出了结果而没有给出证明, 也没有留下他是如何发现这个结果的线索. 所以我们只能猜想他可能正是利用了某一像我们提供的证法.[1]

因为正 n 边形的顶点总是成对地与 OP 对称地出现, 而且与 P 总有相等距离, 图 1-18 的例子表明, 科茨的结果确实等价于把 $U_n(x)$ 因式分解为实的线性因式与二次因式.

现在让我们从假装的对于复数及其几何解释的这一阵失忆症中恢复过来, 这时, 对科茨的结果的理解和证明马上都变得简单了. 取 O 为复平面的原点, 取 C_1 为 1, 则科茨的正 n 边形的顶点就成为 $C_{k+1} = \mathrm{e}^{ik(2\pi/n)}$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, 图 1-19 显示了 $n = 12$ 的情况. 因为 $(C_{k+1})^n = \mathrm{e}^{ik2\pi} = 1$, 突然之间一切都变清楚了：**正$n$边形的$n$个顶点正是$U_n(z) = z^n - 1$的$n$个复根**. 因为 $z^n - 1 = 0$ 的解可以写成 $z = \sqrt[n]{1}$, 正 n 边形的顶点就称为 **n次单位根**.

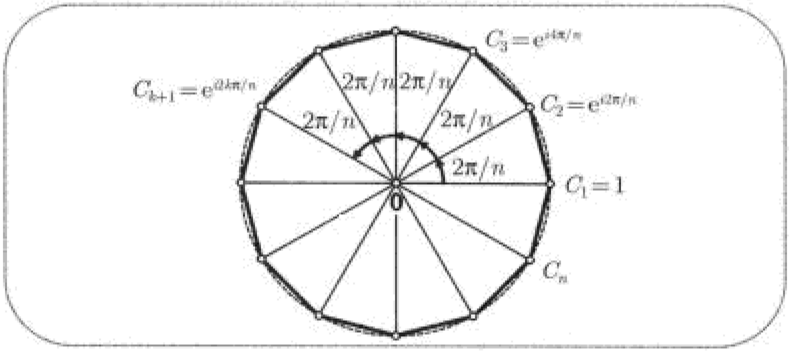


图 1-19

由笛卡儿因式定理, $(z^n - 1)$ 的完全因式分解就是

$$z^n - 1 = U_n(z) = (z - C_1)(z - C_2)\cdots(z - C_n),$$

每一对共轭根给出一个实二次因式

$$\left(z - \mathrm{e}^{ik(2\pi/n)}\right)\left(z - \mathrm{e}^{-ik(2\pi/n)}\right) = z^2 - 2z\cos\left[\frac{2k\pi}{n}\right] + 1.$$

每个因式 $z - C_k = R_k \mathrm{e}^{i\phi_k}$ 都可以看作 (见图 1-17a) 是连接正 n 边形的一个顶点到 z 的复数. 这样, 若 P 是平面上的任意点 (不一定在实轴上), 可得科茨的结果的推广形式:

$$U_n(P) = [PC_1 \cdot PC_2 \cdot \cdots \cdot PC_n]\,\mathrm{e}^{i\Phi},$$

这里 $\Phi = (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n)$. 如果 P 恰好是一实数 (仍设为大于 1), 则 $\Phi = 0$[请确信理解了这一点], 我们就又得到科茨的结果.

---

① Stillwell [1989, 195 页] 则猜想科茨已经使用了复数 (我们差一点也这样想), 然后又故意把他的发现用不需要复数的形式加以宣布.

我们并没有直接用复数来陈述和证明科茨的结果，因为我们觉得以上的直接方法有一种引人入胜的地方. 事后看来，它表明，哪怕我们打算避免复数，我们也无法回避复平面的几何!

1.3.6 向量运算

不仅仅是复数加法与向量加法一样，我们现在还要证明，我们熟悉的向量点乘和叉乘 (也称为数量积和向量积) 运算也包括在复数乘法中. 因为这些向量运算在物理学中极为重要 (它们是物理学家发现的!) 它们与向量乘法的联系在把复分析用于物理世界，以及在用物理学来理解复分析时，都很有价值.

当把复数 $z = x + iy$ 仅仅看成向量时，我们就用黑体 $\mathbf{z}$ 来表示它，并把其分量竖列起来：

$$z = x + iy \iff \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

虽然点乘和叉乘对任意空间向量都有意义，我们下面则假设所有向量都在同一平面 —— 复平面内.

给出两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，图 1-20a 帮我们回忆起，点乘就是一个向量的长乘以另一向量在此向量上的投影：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |a||b| \cos\theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$

其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的夹角.

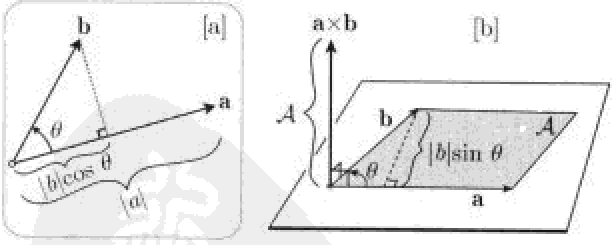


图 1-20

图 1-20b 使我们回忆起叉乘的定义：$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所决定的平面，其长则为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所张的平行四边形的面积 $\mathcal{A}$. 但是请停一下，有两个(相反的) 方向都垂直于 $\mathbb{C}$; 我们选哪一个?

若写出 $\mathcal{A} = |a||b| \sin\theta$，就可以看到，这样写的面积 $\mathcal{A}$ 是有符号的. 要想看出为何这里有符号，一个容易的方法是规定这里的 θ 是由 $\mathbf{a}$旋转到$\mathbf{b}$所成的角(而不是二者的夹角)，其值在区间 $-\pi$ 到 π 中. 可见 $\mathcal{A}$ 的符号是与 θ 的符号一致的. 如果 $\mathcal{A} > 0$，如图 1-20b 那样，我们就定义 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是由平面向上指的，而若 $\mathcal{A} < 0$，就定义它是向下指的. 由此可见 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的定义中包含了一个人为的规定, 叉乘内蕴地是 3 维的. 这就提出了一个问题: 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 被看成了复数, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 就不可能是复数, 因为它并不位于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所在的 (复) 平面 $\mathbb{C}$ 内. 对于点乘就不存在这个问题, 因为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 只是一个实数, 但这也就为我们指出了一条出路.

因为我们所有的向量都在同一平面内, 对此平面可以指定一个法线方向, 于是, 向量的叉乘要么与此法线有同样的方向, 要么方向相反, 所以一个叉乘与另一个叉乘的区别在 $\mathcal{A}$ 的数值上. 所以为了本书所需, 我们将重新定义向量的叉乘是由 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$ 所张的(而不只是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所张的)平行四边形的(有符号的)面积:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = |a||b|\sin\theta = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a}).$$

图 1-21 表明, 若有两个复数 $a = |a|e^{i\alpha}$ 和 $b = |b|e^{i\beta}$, 则由 a 到 b 的角是 $\theta = (\beta-\alpha)$. 为了看出它们的点乘与叉乘怎样与复数乘法相关, 先考虑用 $\overline{a}$ 乘 $\mathbb{C}$ 的任一点的净效果. 这就是旋转一个角 $-\alpha$ 再放大 $|a|$ 倍, 如果再看斜边为 b 的有阴影的直角三角形在此变换下的象, 则我们可以立刻看到

$$\overline{a}b = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{1.20}$$

当然我们也可以通过简单的计算得出这个结果:

$$\begin{aligned}\overline{a}b &= (|a|e^{-i\alpha})(|b|e^{i\beta}) = |a||b|e^{i(\beta-\alpha)}\\ &= |a||b|e^{i\theta} = |a||b|(\cos\theta + i\sin\theta).\end{aligned}$$

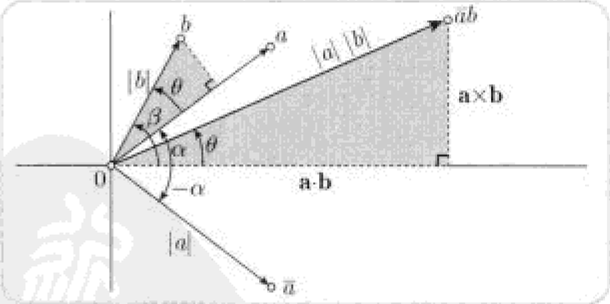


图 1-21

当我们把点乘和叉乘说成是 "向量运算" 时, 这意味着它们是几何地加以定义的, 而与坐标轴的任意特定的选取无关. 然而, 一旦选定了一个笛卡儿坐标系, (1.20) 式将使得很容易用笛卡儿坐标来表示这些运算. 写出 $a = x+iy$, $b = x'+iy'$, 则

$$\overline{a}b = (x-iy)(x'+iy') = (xx'+yy') + i(xy'-x'y),$$

所以

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx'+yy', \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xy'-x'y$$

我们以一个例子结束本节, 这个例子说明了面积 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ 的符号之重要性. 考虑计算图 1-22a 中的四边形的面积 $\mathcal{A}$ 这个问题, 这个四边形的顶点依逆时针方向依次为 a, b, c, d. 很显然这只是四个三角形的通常的无符号的面积之和, 这些三角形是由连接四边形的顶点到原点 O 形成的. 这样, 因为每个三角形的面积只是相应平行四边形面积的一半, 故有

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}[(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{d}\times\mathbf{a})]\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}[\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}d + \bar{d}a]. \qquad (1.21)\end{aligned}$$

显然这个公式可以推广到多于四边的多边形.

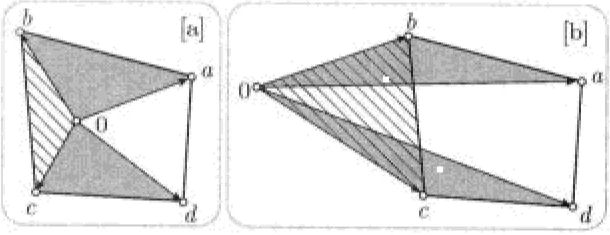


图 1-22

但是如果 O 在四边形之外又怎么办? 在图 1-22b 中, $\mathcal{A}$ 显然是其中三个三角形的通常面积之和, 再减去画了斜线的三角形的通常面积. 但因由 **b** 到 **c** 的角是负的, 所以 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 将自动地是有阴影区域的负面积, 而 $\mathcal{A}$ 将仍可用上面的公式来表示!

能不能找到 O 的一个位置使得恰有两个有符号的面积为负? 习题 35 将证明, (1.21) 式总是对的.

1.4 变换与欧氏几何 *

1.4.1 克莱因眼中的几何

尽管引入复数有许多好处, 但是现在来谈论这些好处也只不过是事后诸葛亮, 仍然很难找到一种不得不接受的引入复数的方式. 从历史上看, 我们已经看见了三次方程怎样以代数方式把复数强加给我们, 而在讨论科茨的工作时, 我们又看到其几何解释有某种不可避免性. 在本节中我们想要表明, 在仔细地重新考查欧氏平面几何后, 复数是怎样自然地, 几乎不可避免地出现的.[①]

本节标题后面加上了一个星号 (*), 表示本节的内容可以略去. 然而, 本节的思想, 除了 "解释" 复数以外, 其本身也是很有意思的, 而且对于理解本书其他选读的内容, 也是有需要的.

① Nikulin and Shafarevich [1987] 的极佳的书是我们知道的仅有的具有类似想法的著作.

尽管古希腊人在几何学中有许多漂亮的、了不起的发现, 但直到 2000 多年后, 克莱因[①]才第一次提出了 “什么是几何学?” 这个问题, 并且作出了回答.

我们仅限于讨论*平面*几何学. 人们可以说它就是研究平面上的几何图形的几何性质的, 但是, (i) 什么是 “几何性质”? (ii) 什么是 “几何图形”? 我们将集中于问题 (i), 而对 (ii) 则很快地一带而过, 把 “几何图形” 解释为我们在一张平铺着的无限大的纸上用无限细的笔画出来的东西.

至于 (i), 我们首先要提出, 如果两个几何图形 (例如三角形) 具有同样的几何性质, 则 (从几何学的观点来看) 它们必定是 “相同的”、“相等的”, 或者如我们常说的, 是*全等的*. 这样, 如果我们对全等 (“几何相等性”) 有了清楚的定义, 就可以把这件事反过来说, *定义几何性质就是所有全等图形所共有的性质*. 那么, 怎样看出两个图形为几何相等呢?

考虑图 1-23 中的三角形, 而且设想它们都是可以捡起来的纸片. 要问 T 是否全等于 T', 只要捡起 T 来, 看看能否放在 T' 上. 注意, 允许在 3 维空间中移动 T 这一条件是很本质的: 要想把 T 放在 $\tilde{T}$ 上, 必须先把 T 翻一个面; 只让 T 沿平面滑动是翻不过来的. 我们试着把这一点一般化, 它使我们想到, 需要提出, *如果有两个图形 F 和 F', 而且存在一个经过 3 维空间的运动使 F 与 F' 重合, 则二者全等*. 注意, 这一讨论使我们想到存在两种基本不同类型的运动: 其一包含了把图形翻一个面, 另一类则不. 我们以后还会回到很重要的这一点.

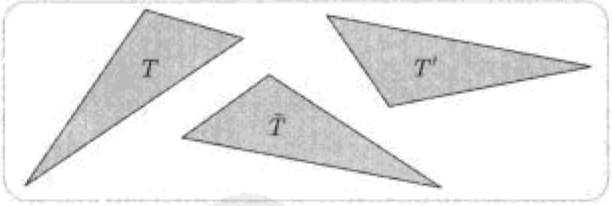


图 1-23

很清楚, 多少令人感到不满意的是, 在试图定义*平面上*的几何学时, 却必须求助于经过 3 维空间的运动. 我们现在来改正这一点. 回到图 1-23, 想象 T 和 T' 都是画在透明胶片上的. 现在我们不是捡起三角形 T, 而是捡起画着 T 的*整张胶片*, 然后把它放在第二张胶片上使 T 恰好与 T' 重合. 经过这一运动, T 的胶片上的每一点 A 都落在 T' 的胶片的一点 A' 上, 而我们可定义运动 $\mathcal{M}$ 就是平面本身的一个映射:$A \mapsto A' = \mathcal{M}(A)$.

然而, 并不是所有的映射都够得上成为运动的资格, 因为我们还必须抓住一个思想 (前面其实已经暗地里这样做了): 胶片在运动中必须是*刚性的*, 使得点之间的距离在运动中不变. 于是我们的定义如下:

① Felix Klein, 1849—1925, 伟大的德国数学家. —— 译者注

> 运动就是平面到其自身的一个映射且使任两点 A, B 的距离与其象 $A' = \mathcal{M}(A), B' = \mathcal{M}(B)$ 的距离相同. (1.22)

注意, 我们所称的运动也常称为 "刚性运动" 或 "等距同构".

有了关于运动的精确概念以后, 我们对几何相等性就有了一个最终的定义:

> 如果存在一个运动 $\mathcal{M}$, 使得 $F' = \mathcal{M}(F)$, 就说 F 全等于 F', 记作 $F \cong F'$ (1.23)

其次, 作为以前的讨论的一个推论, 我们说: *一个图形的几何性质就是它的经过一切运动都不改变的性质*. 最后, 为了回答那个尚未解决的问题 "什么是几何学?" 克莱因回答说, 几何学就是研究运动的集合的所谓*不变式*(或*不变量*).

19 世纪最重要的发现之一就是, 欧氏几何并非唯一可能的几何学, 第 6 章里将要研究所谓非欧几何中的两种, 但是目前我们只想说明克莱因怎样能推广以上的思想使得也能包括这种新几何学.

(1.23) 的目的是用一族变换来引入几何相等性的概念. 但是这种 $\cong$ 类型的相等性会如我们之所愿吗? 为了回答这个问题, 我们必须先弄明白, 我们希望的是什么? 为了不把一般的讨论与 (1.23) 中的特定的全等概念混淆, 我们暂时不用 $\cong$ 这个记号, 而把几何相等性记作 $\sim$. 我们希望所谓几何相等性应该符合以下三个条件:

(i) 一个图形应该等于其自身: $F \sim F$ 对一切 F 成立.

(ii) 若 F 等于 F', 则 F' 也等于 F: $F \sim F' \Rightarrow F' \sim F$.

(iii) 若 F 等于 F', F' 等于 F'', 则 F 也应与 F'' 相等:

$$F \sim F' \& F' \sim F'' \Rightarrow F \sim F''$$

符合这些要求的任何关系都称为*等价关系*.

现在假设仍保留几何相等性的定义 (1.23), 但对运动的定义 (1.22) 加以推广, 即将其中的保距变换族代以某个其他的变换族 G, 应该要明白, 并非任意我们已知的原有的 G 都与我们定义几何相等性的目的相容. 事实上, (i), (ii) 与 (iii) 蕴含着 G 必有以下很特殊的构造, 我们把它用图 1-24 画出来.①

(i) 族 G 必包含一个映一点为其自身的变换 $\mathcal{E}$ (称为*恒等变换*).

(ii) 若 G 中含有一变换 $\mathcal{M}$, 则亦必包含解除 $\mathcal{M}$ 的变换 $\mathcal{M}^{-1}$(称为 $\mathcal{M}$ *之逆*)[请验证, 为使 $\mathcal{M}^{-1}$ 存在 (且不管 $\mathcal{M}^{-1}$ 是否 G 之元), $\mathcal{M}$ 必须具有以下的特殊性质: (a) 把平面映到 (*全平面*) 上.(b) 一对一; 即是说: (a) 平面的每点必为此平面的某点之象, (b) 不同点有不同的象].

(iii) 若 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 都是 G 中之元, 则其复合映射 $\mathcal{N} \circ \mathcal{M}$=(先作 $\mathcal{M}$ 再作 $\mathcal{N}$) 也是 G 中之元. G 的这一性质称为*封闭性*.

---

① 这里 G 是射影之群, 如果我们要作一个平面图形的透视画, 则从那个平面到 "画布" 平面的映射就称为一个透视. 射影则定义为任意一串透视. 你能看出来何以射影的集合应该构成一个群吗?

这样我们很自然地达到了对整个数学都具有基本重要性的概念：满足这三条要求[①]的变换族 G 称为*群*.

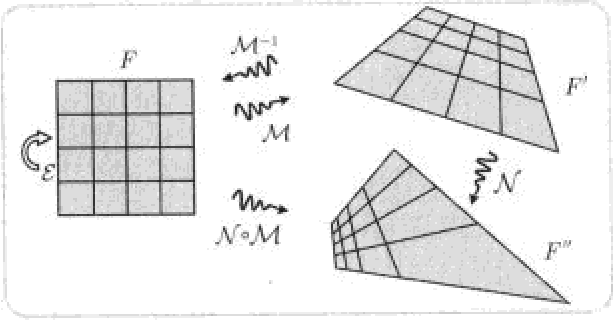


图 1-24

我们来验证一下, (1.22) 中定义的运动构成一个群：(i) 因为恒等变换保持距离不变, 它自然是一个运动. (ii) 运动的逆只要存在, 当然也保持距离, 因此也是运动. 它是否存在呢? (a) 如果对全平面作一运动, 那么说其象也是全平面, 也还是*合情理的*—— 但以后还要证明.(b) 两个不同点的非零距离在运动中仍得保持不变, 所以它们的象仍是不同点. 因此 $\mathcal{M}$ 之逆确是存在的.(iii) 如果两个变换都不改变距离, 则相继施行它们也不会改变距离, 所以两个运动的复合仍是运动.

克莱因的思想是, 我们可以先任意选定一个群 G, 然后定义一种相应的几何学, 即是对 G 的不变量的研究. [克莱因第一次宣布这个思想是在 1872 年 —— 那时他才 23 岁! —— 在爱尔朗根大学, 所以后来这个思想就以他的*爱尔朗根纲领*为名而著称于世.] 例如, 若取 G 为运动群, 我们就回到了平面上的欧氏几何学. 但是这远非平面上*唯有的*几何学, 图 1-24 上画出的*射影几何学*就是另外一种.

克莱因对于几何学的视野其实还更宽广. 我们一直关注的是, *当图形是画在平面上任何地方时*, 可能有什么样的几何学, 但是例如假设只允许我们把图形画在某个圆盘 D 内. 应该很清楚, 我们可以恰如构造平面上的几何学一样, 来构造 "D 中的几何学"：给定一个由 D 到其自身的变换之群 H, 相应的几何学就是研究 H 的不变量. 如果你怀疑是否有这样的群存在, 考虑所有绕 D 之中心的旋转之集合好了.

读者很可能会感觉以上的讨论全属数学推广癖这种慢性病的大发作 —— 所得的关于几何学的概念 (套用卡丹诺的那句话) 是 "既不可捉摸又没有用处". 但是这就背离了真理, 错得不能再错了! 在第 3 章里, 我们将被很自然地被引导着去考虑一个很有趣的由圆盘到其自身的变换群. 所得的几何学称为*双曲几何*或*罗巴切夫斯基*[②]几何, 而这将是第 6 章的主题. 这种几何远非没有用处, 而被证明在广泛的数

① 在更一般的背景下群的定义中还要增加第四个要求：*结合性*, 即 $\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})=(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}$, 对于变换它当然自动成立.

② Nikolai Ivanovich Lobachevski, 1792–1856, 伟大的俄罗斯数学家. —— 译者注

学领域中是强有力的工具, 它不断地一直在现代研究的最前沿提供新的洞察.

1.4.2 运动的分类

要理解欧氏几何的基础, 看来必须研究其运动群. 现在这个群还是相当抽象地定义为平面到其自身的保持距离的变换之集合的. 然而很容易想到运动的一些例子: 平面绕任意点的旋转、平面的平移还有平面对某一直线的反射. 我们的目的是用同样生动的东西来理解最一般可能的运动.

我们先从宣布一个关键事实开始:

> *一个运动可以由它对任意三角形 (即任意三个非共线的点) 的效果唯一确定.* (1.24)

这句话的意思就是, 只要知道这三个点怎么变, 就可以知道平面上每个点怎么变. 为了看出这一点, 请先看图 1-25. 每个点 P 都可由它到这个三角形的顶点 A, B, C 的距离唯一决定. [1]到 A 和到 B 的距离给出了两个圆, 它们一般地交于两个点, P 与 Q. 第三个距离 (即到 C 的距离) 就可以把 P 找出来.

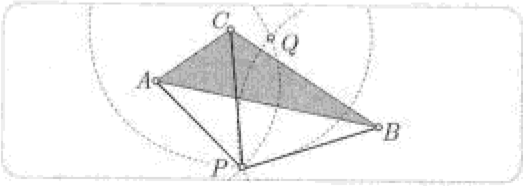


图 1-25

为了证明 (1.24), 现在看图 1-26. 它表示运动 $\mathcal{M}$ 把 A, B, C 映为 A', B', C'. 由运动的定义, $\mathcal{M}$ 必把任一点 P 映到 P', 而 P' 到 A', B', C' 之距离等于 P 到 A, B, C 原来的距离. 这样, 如已证明的那样, P' 被唯一确定. 证毕.

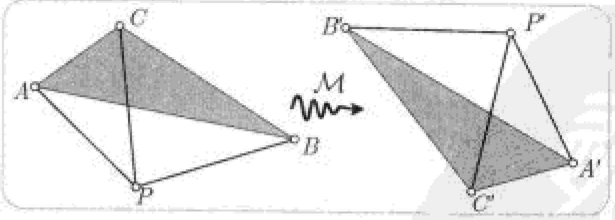


图 1-26

认识到有两类基本不同的运动, 是在分类上进了一大步. 用我们原来已有的、关于运动可以通过空间来进行的概念, 这两类基本不同的运动的区别在于: 要把一个图形放到另一个图形上面, 是否需要翻一个面. 可以看到在新定义 (1.22) 中, 对

① 地震就是用这个方法定位的. 地震开始时就会发出两个波: 快速传播的 "P 波"(压缩波) 以及缓慢传播的有破坏力的切变波 "S 波". 于是 P 波将在 S 波之前到达地震站, 而这两个事件之时差就可用来计算地震到地震站的距离. 再对另外两个台站计算出这个距离, 就可确定地震的位置.

于运动也会出现这种二分法：设一运动把 A, B 两点送到 A', B' 处. 见图 1-27. 按 (1.24), 还不能确定这个运动, 我们还需要知道第三个点, 即如图 1-27 所示的 (与 A, B 不共线的)C 点之象. 因为运动保持 C 到 A 和到 B 的距离, 则 C 之象恰好有两个可能性, 即或者是 C' 或者是它对过 A', B' 的直线 L 的反射象 $\widetilde{C}$. 这样, 恰好有两个运动 (例如记作 $\mathcal{M}$ 和 $\widetilde{\mathcal{M}}$) 映 A, B 到 A', B': $\mathcal{M}$ 把 C 映到 C', $\widetilde{\mathcal{M}}$ 把 C 映到 $\widetilde{C}$.

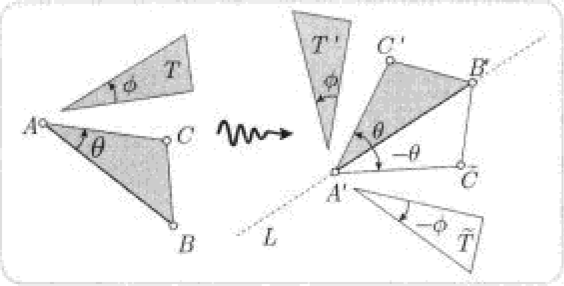


图 1-27

为了区别这两个运动, 可以看它们对于角的影响如何. 所有的运动都能保持角的大小. 但是我们看到 $\mathcal{M}$ 还保持角 θ 的*定向*, 而 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 却把它反转. 这个区别的基本本性是: $\mathcal{M}$ 必定事实上保持*所有的*角的定向, 而 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 则把所有的角的定向都反转.

为了证明这一点, 先看一下三角形 T 中的角 ϕ 命运如何. 如果 C 被映到了 C'(即若运动是 $\mathcal{M}$), 作出图 1-26 就可以看到, T 的象是 T', 角的定向得到保持. 如果是另一情况, 即 C 被映到了 $\widetilde{C}$(即运动为 $\widetilde{\mathcal{M}}$), 则 T 的象是 T' 对 L 的反射, 而角的定向则被翻转了. 保持角的定向的运动称为*保向的*(或称*直接的*), 使其翻转的称为*反向的*. 这样, 平移和旋转都是保向的, 而反射是反向的. 综述以上所得有:

恰好存在一个保向运动 $\mathcal{M}$(以及恰好一个反向运动 $\widetilde{\mathcal{M}}$) 将一已给线段 AB 映为另一个等长线段 $A'B'$. 此外, $\widetilde{\mathcal{M}}$=($\mathcal{M}$ 再继以对 $A'B'$ 的一个反射). (1.25)

这样, 为了理解运动, 我们可以考虑两个随机选出的等长线段 AB 与 $A'B'$, 然后再找出映其一为另一的这个保向运动 $\mathcal{M}$(反向运动 $\widetilde{\mathcal{M}}$.) 现在就容易证明

每个保向运动均为一旋转, 或 (在例外情况下) 为一平移. (1.26)

注意, 这个结果使我们对于早先关于旋转与平移的复合的计算有了更深的洞察: 因为任意两个保向运动的复合仍为一保向运动 [为什么？], 它就只可能是一旋转或平移. 反过来, 那些计算可以把 (1.26) 很简洁地重新表述如下:

每个保向运动都可以表为一个如下形状的复函数 $\mathcal{M}(z) = e^{i\theta}z + v$. (1.27)

现在来证明 (1.26), 若线段 $A'B'$ 平行于 AB, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 或相等或反向. 如果它们相等则如图 1-28a 所示, 该运动是一平移; 如果它们反向, 则图 1-28b

表明, 该运动是绕 AA' 与 BB' 的交点旋转角度 π.

如果这两线段不平行, (在有必要时) 延长它们使之相交于 M 点. 令 θ 为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向的夹角, 见图 1-28c. 由圆的一个初等性质, 弦 AA' 对圆弧 AMA' 之任一点均张等角 θ. 然后用 O 表示 AA' 之垂直平分线与弧之交点. 这样就可看到, 把 AB 变为 $A'B'$ 的保向运动就是绕 O 点旋转角度 θ, 因为 A 被转到 A' 点, 而 $\overrightarrow{AB}$ 的方向转成了 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向. 证毕.

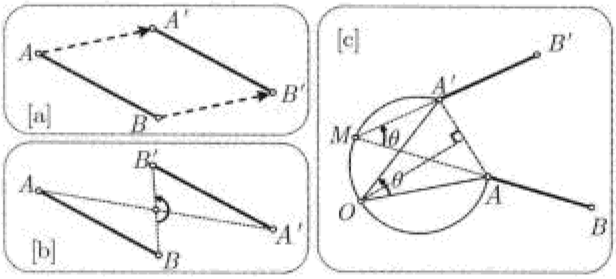


图　1-28

说平移是 "例外" 的, 是在下述意义下: 如果两个线段是随机地画的, 则二者平行是很罕见的. 事实上, 给定了 AB, 则只有当 $A'B'$ 的方向在无穷多方向中, 恰好是 AB 的方向时, 才只需作一个平移, 所以一个随机的保向运动恰为平移这一事件的数学概率确实为零!

对于我们来说, 保向运动比反向运动更重要, 所以我们把对于反向运动的研究留作习题 39~41. 更加强调保向运动的理由是它们构成一个群 (整个运动群的一个*子群*), 而反向运动则不构成子群. 能看出为什么吗?

1.4.3　三反射定理

在化学里关注的是原子的相互作用, 但是, 想要更深入地洞察它们就必须研究构成原子的电子、质子和中子. 与此类似, 虽然我们关注的是保向运动, 但是保向运动是由反向运动构成的. 研究构成它们的反向运动, 就能有更深的洞察. 准确些说,

$$\text{每个保向运动均为两个反射的复合.} \tag{1.28}$$

注意, 由 (1.25) 的第二句即知: *每个反向运动均为3个反射的复合*. 见习题 39. 简而言之, 每个运动均为或两个或三个反射复合而成, 这个结果称为*三反射定理*.[①]

前面我们曾试图证明运动的集合成为一个群, 但是并不清楚是否每个运动都有一个逆. 三反射定理非常简洁而明确地解决了这个问题, 因为一串反射的逆就是把这些反射以相反的次序再作一次.

以下, 我们用 $\mathfrak{R}_L$ 记对于直线 L 的反射. 因此, 先对 L_1 作反射, 再继之以对 L_2

① 像 (1.26) 那样的结果也可以看作是这个定理的推论; Stillwell[1992] 对这个方法有漂亮的初等讲解.

作反射就记为 $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$. 按照 (1.26), 想要证明 (1.28), 就是要证明每个旋转 (以及每个平移) 都具有 $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$ 这样的形状, 这是以下两个命题的直接推论:

若 L_1 与 L_2 相交于 O, 而由 L_1 到 L_2 的角为 ϕ, 则 $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$ 就是绕 O 旋转 2ϕ.

以及

若 L_1 与 L_2 平行, 而 $\mathbf{v}$ 为由 L_2 垂直连接到 L_1 的向量, 则 $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$ 就是平移 $2\mathbf{v}$.

这两个结果都很容易直接证明 [请试一试!], 但是下面的证法或者更漂亮.

首先, $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$ 是一个保向运动 (因为它把一个角的定向翻转两次), 它或者是一旋转或者是一平移. 其次, 注意旋转与平移之区别在于它们有不同的**不变曲线**, 即被映为自身的曲线. 对于绕 O 点的旋转, 它们是以 O 为中心的圆, 对于平移, 则为平行于此平移的直线.

先看图 1-29a, 很清楚, $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$ 使所有以 O 为中心的圆都不变, 所以它是绕 O 的旋转. 为了看出旋转角为 2ϕ, 考虑 L_1 上一点 P 的象 P' 即知, 证毕.

再看图 1-29b. 显然 $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$ 保留所有垂直于 L_1 和 L_2 的直线不变. 为了证明平移量为 $2\mathbf{v}$, 考虑 L_1 上一点 P 之象 P' 即知. 证毕.

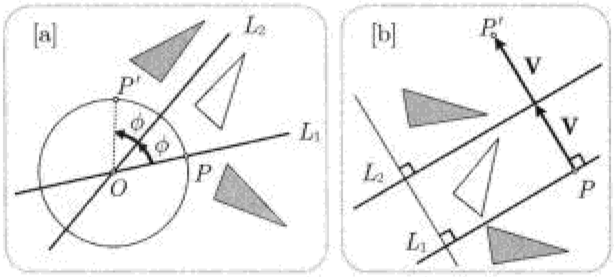


图 1-29

注意, 转一个角 θ 的旋转必可以表示为 $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$, 其中 L_1, L_2 是**任意**一对经过旋转中心而且成角 $(\theta/2)$ 的直线. 类似于此, 平移 $\mathbf{T}$ 相应于任意一对相隔 $\mathbf{T}/2$ 的平行直线. 这个情况给出了一个组合旋转与平移的很漂亮的方法.

例如看图 1-30a, 这里绕 a 旋转一个角 θ 已表示为 $\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}$, 而绕 b 旋转角 ϕ 则已表为 $\Re_{L_2'}\circ\Re_{L_1'}$. 为了求先绕 a 再绕 b 的旋转的总效果, 取 $L_2 = L_1'$ 为过 a , b 两点的任意直线, 如果 $\theta+\phi\neq 2\pi$, 则 L_1 与 L_2' 必在某点 c 相交, 如图 1-30b 所示. 这两个旋转的复合就是

$$(\Re_{L_2'}\circ\Re_{L_1'})\circ(\Re_{L_2}\circ\Re_{L_1}) = \Re_{L_2'}\circ\Re_{L_1},$$

这就是绕 c 旋转 $(\theta+\phi)$! 习题 36 证明了这种作法与 1.3.3 节中讲的旋转的复合的作法是一致的.